

Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma licenciatura em matemática no estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele

The levels of geometric thinking development of Mathematics Graduation students in Pernambuco state: a study according to Van-Hiele's theory

Los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de estudiantes de una licenciatura en matemáticas en el estado de Pernambuco: un estudio bajo la óptica de la teoría de Van-Hiele

André Pereira da Costa

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife/PE – Brasil

Marilene Rosa dos Santos

Universidade de Pernambuco (UPE), Garanhuns /PE – Brasil

Resumo

Este artigo tem por objetivo analisar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes que cursam licenciatura em matemática, em uma instituição pública, no estado de Pernambuco. O estudo se baseou na Teoria de Van-Hiele (1957), que discute o desenvolvimento do pensamento geométrico. A metodologia de abordagem quanti-qualitativa e de caráter diagnóstico versou sobre a aplicação de um teste sobre o conceito de quadriláteros notáveis. Participaram dessa pesquisa 24 discentes, que já haviam cursado disciplinas relacionadas à geometria no referido curso. Os dados produzidos indicam a maioria dos estudantes atuando no primeiro nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, e uma parte menor trabalhando no terceiro nível vanhieliano.

Palavras-chave: Pensamento geométrico, Teoria de Van-Hiele, Quadriláteros

Abstract

This article aims to analyze the levels of geometric thinking development of undergraduate students in Mathematics at a public institution in the state of Pernambuco. The research was based on Van Hiele's Theory (1957), which discusses the geometric thinking development. The quantitative-qualitative and diagnostic nature methodology was carried through the application of a test on the concept of notable quadrilaterals. 24 students, who had already attended subjects related to geometry in

that course, have participated in this study. The data produced indicate the majority of students acting on the first level of geometric thinking development, and a fewer number of students working on the third Van-Hiele's level.

Keywords: Geometric thinking, Van-Hiele theory, Quadrilaterals

Resumen

Este artículo tiene por objetivo analizar los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de estudiantes que cursan licenciatura en matemáticas, en una institución pública, en el estado de Pernambuco. El estudio se basó en la Teoría de Van-Hiele (1957), que discute el desarrollo del pensamiento geométrico. La metodología de abordaje cuanti-cualitativo y de carácter diagnóstico versó sobre la aplicación de una prueba sobre el concepto de cuadriláteros notables. Participaron de esa investigación 24 alumnos, que ya habían cursado asignaturas relacionadas a la geometría en dicho curso. Los datos producidos indican la mayoría de los estudiantes que actúan en el primer nivel de desarrollo del pensamiento geométrico, y una parte menor trabajando en el tercer nivel vanhieliano.

Palabras clave: Pensamiento geométrico, Teoría de Van-Hiele, Cuadriláteros

1. Introdução

Por cerca de três décadas, a geometria foi excluída do currículo escolar, dos livros didáticos e dos cursos de formação de professores, deixando uma grande lacuna conceitual nesse campo da matemática, tanto para os docentes, como para os estudantes. Todavia, com o avanço nas pesquisas da área de educação matemática e com o surgimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no final dos anos de 1990, esse cenário tem se modificado, e o ensino da geometria vem resgatando seu espaço, ainda que de forma tímida, nas classes de matemática do Brasil.

No entanto, dados de pesquisas referentes ao ensino da geometria, como de Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b; 2016a; 2016b), e os resultados de avaliações em larga escala, em nível estadual (Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco – Saepe, 2015), em nível nacional (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Saeb, 2015) e em internacional (Programa Internacional de Avaliação Comparada – Pisa, 2015), evidenciam que estudantes de diferentes níveis escolares do ensino básico apresentam baixo desempenho nas questões que exploram conceitos geométricos.

Além disso, quando avançamos os níveis escolares, verificamos que estudantes de uma licenciatura em matemática (COSTA; SANTOS, Rosa, 2016) e professores de matemática da educação básica (COSTA; SANTOS, Câmara, 2016c)

também apresentam as mesmas dificuldades conceituais de aprendizagem, o que justifica a necessidade de estudos sobre esse campo.

Nessa direção, pesquisadores brasileiros têm se enveredado a analisar o porquê de os estudantes apresentarem baixos desempenhos, no que se refere à geometria e, conseqüentemente, a forma como ela tem sido trabalhada em sala de aula, em diferentes níveis escolares.

Como ilustração, alguns desses investigadores (SENA; DORNELES, 2013; CONCEIÇÃO; OLIVEIRA, 2014; REZENDE, 2015) têm concluído, que pouco se tem ensinado sobre geometria em sala de aula na educação básica, e que muitos professores ainda se sentem desconfortáveis em lidar com esse campo matemático em sua prática docente.

Diante desse contexto, indagamo-nos sobre o pensamento geométrico dos discentes que cursam o ensino superior em matemática. Será que estudantes de licenciatura, que já estudaram disciplinas referentes a esse saber, estão em níveis mais avançados de desenvolvimento do pensamento geométrico?

Com base nesse questionamento, optamos por restringir o foco da pesquisa e escolhemos os quadriláteros notáveis como objeto matemático a ser investigado. Vale salientar que, de acordo com as diretrizes curriculares de matemática (BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012), esse conceito deve ser sistematizado no 6º ano do ensino fundamental. Sendo assim, temos como hipótese que os alunos do ensino superior, futuros professores de matemática do ensino básico, classificam esses quadriláteros em níveis mais elaborados do pensamento geométrico.

Para responder a nossa indagação, apoiamo-nos na Teoria de Van-Hiele (1957), em que se propõe um modelo teórico de níveis de compreensão em geometria. De acordo com essa teoria, o desenvolvimento do pensamento geométrico se inicia a partir do reconhecimento das figuras geométricas pela aparência física (primeiro nível), finalizando no estudo de diferentes sistemas axiomáticos (quinto nível). Logo, entendemos que um estudante de graduação em matemática deve atuar nos últimos níveis propostos por Van-Hiele.

Por tudo isso, nosso objetivo geral é analisar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de licenciatura em matemática, no estado de Pernambuco, em relação a um problema que envolveu o conceito de quadriláteros

notáveis. De forma mais específica, buscamos identificar em qual nível de pensamento geométrico se situa cada participante.

2. Referencial teórico

A teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico foi construída pelo casal de professores e pesquisadores holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Gina Van-Hiele Geodolf, no final da década de 60 do século XX. Para isso, fundamentaram-se nas ideias do psicólogo suíço Jean William Fritz Piaget, que desenvolveu a Teoria Psicogenética, também conhecida como concepção construtivista da formação da inteligência.

Em seus estudos, os Van-Hiele utilizaram suas próprias salas de aula do ensino básico holandês como campo de pesquisa, pois buscaram compreender melhor as dificuldades de aprendizagem dos seus estudantes, ao trabalharem situações que abordassem os conceitos geométricos. Nesse sentido, a principal questão que norteou as pesquisas do casal Van-Hiele foi verificar por quais motivos os seus alunos dominavam a maior parte dos conteúdos curriculares, mas apresentavam dificuldades na aprendizagem de geometria.

Ao refletir sobre essa questão, Van-Hiele (1957) constatou a existência de diferentes níveis de desenvolvimento que compõem o pensamento geométrico. Segundo esse autor, o progresso entre os níveis ocorre por meio de uma sequência hierárquica, em que o aluno passa de um nível mais elementar para um mais elaborado. Assim, ao estudar conceitos geométricos, por meio de atividades bem planejadas e previamente elaboradas pelo professor, um estudante progredirá com mais facilidade do que um aluno que não teve as mesmas condições.

Além disso, diferente do que propõe a teoria de Piaget, o progresso do pensamento geométrico de um sujeito não depende de sua idade, nem de sua maturidade biológica. O que promove esse desenvolvimento é o ato educativo, como bem discute Câmara dos Santos (2002, p.7):

[...] Van-Hiele evidencia que esse processo de construção do pensamento geométrico não seria ligado somente a uma maturação ontogenética, mas que ele é produto da ação educativa. A escolha das situações didáticas poderia agir não somente no sentido de catalisar o processo, mas também servir de agente limitador do desenvolvimento, podendo mesmo impedir o aluno de atingir os níveis mais elevados do processo. Seria o caso, por exemplo, de exigir que o aluno faça demonstrações correspondentes a um nível superior ao que lhe permitiria seu pensamento geométrico.

Portanto, o que promove a evolução do pensamento geométrico é a vivência com atividades adequadas, que, ao serem trabalhadas em sala de aula, favorecem a aprendizagem geométrica. Nessa direção, Van-Hiele (1957) propôs um modelo teórico formado por cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, que se inicia a partir da compreensão dos objetos geométricos pelo seu aspecto global, concluindo-se no estudo de diferentes sistemas axiomáticos. Como podemos perceber no quadro a seguir, cada nível apresenta características que revelam a estrutura do pensamento geométrico.

Quadro 1 – Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

NÍVEIS	CARACTERÍSTICAS	EXEMPLOS
Primeiro nível	Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais, (protótipos visuais), sem usar explicitamente as propriedades desses objetos.	O estudante classifica os quadriláteros (ilustrados em recortes) em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Segundo Nível	Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos.	O estudante descreve um quadrado mobilizando suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
Terceiro Nível	Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito, além de entender deduções simples. No entanto, demonstrações não estão incluídas.	O estudante descreve um quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados congruentes e 4 ângulos retos, logo, é um caso especial de retângulo e de losango. O quadrado também é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.
Quarto Nível	Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos, compreendê-las.	O estudante demonstra as propriedades dos quadriláteros notáveis por meio da congruência de triângulos.
Quinto Nível	Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias geometrias na ausência de modelos concretos.	O estudante estabelece e demonstra teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Jehin e Chenu (2000)

Pelo quadro, é possível perceber que os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico estabelecem uma sequência hierárquica. Isso significa que, para atingir um nível mais consolidado, o aluno deve ter passado por níveis mais elementares. Segundo Van-Hiele (1957), cada nível possui características específicas, como seu próprio vocabulário, além de relações com os objetos geométricos que divergem de um nível para outro.

A teoria de Van-Hiele pode ser um guia de orientação aos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, pois, a partir do conhecimento das características dos níveis de pensamento geométrico dos estudantes, o professor de matemática poderá organizar, de forma mais produtiva, as situações didáticas a serem vivenciadas em sala de aula, de forma a garantir uma melhor aprendizagem aos alunos. (COSTA; SANTOS, Câmara, 2016c, p.111)

Para a teoria vanhieliana, um aluno de ensino superior, que estuda objetos matemáticos de forma sistemática, poderá dominar o processo dedutivo, desenvolver demonstrações, estabelecer comparações de axiomas e teoremas de diferentes sistemas, que são características do quarto nível e do quinto nível de pensamento geométrico.

3. Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa apresenta uma abordagem quanti-qualitativa, pois concordamos com Souza e Kerbauy (2017, p.01), quando afirmam que “o qualitativo e o quantitativo se complementam e podem ser utilizados em conjunto nas pesquisas, possibilitando melhor contribuição para compreender os fenômenos educacionais investigados”.

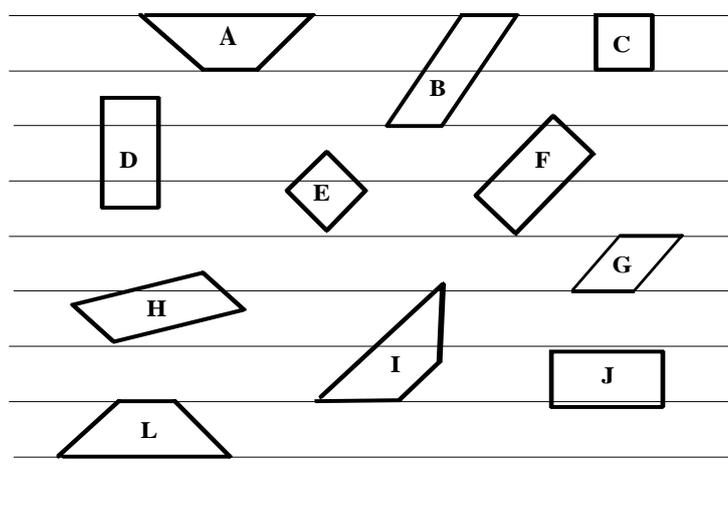
Participaram desta investigação 24 estudantes matriculados no sexto período de uma licenciatura em matemática, no estado de Pernambuco. Esses discentes já tinham cursado disciplinas relacionadas à geometria na época da produção dos dados. A faixa etária dos estudantes variava entre 20 e 35 anos de idade. Além disso, 10 estudantes eram do sexo feminino e 14 do masculino. Alguns desses discentes já atuavam como professores de matemática no ensino básico ou como professores de reforço escolar.

Neste artigo, serão omitidos o nome da instituição de ensino superior e a localização geográfica em que os estudantes realizavam o curso, na época da coleta

de dados. Isso se justifica pelo fato de não ser nossa intenção realizar uma avaliação da instituição.

Utilizamos como instrumento de coleta de dados um teste, com uma questão que explorava a classificação de onze quadriláteros notáveis em diferentes grupos: retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos. Nesse sentido, os estudantes foram convidados a separar as figuras apresentadas, na folha de papel (Figura 1), em classes de família.

Figura 1 – Quadriláteros notáveis disponibilizados para a categorização



Fonte: Santos (2009)

Destacamos, também, que essa questão foi utilizada por Câmara dos Santos (1992; 2001), em uma pesquisa envolvendo alunos do 6º ano do ensino fundamental, com o objetivo de analisar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico desses estudantes.

Nesta pesquisa, a questão investigada teve por objetivo analisar se os estudantes reconheciam as figuras geométricas em classes de família, a partir de sua aparência física (característica do primeiro nível de Van-Hiele) ou por meio de suas propriedades (que corresponde ao segundo nível). Da mesma forma, verificamos se eles estabeleciam a inclusão de classe dessas figuras (aspecto do terceiro nível) ou se por meio de demonstrações (quarto nível) ou, então, a partir do estudo de sistemas axiomáticos (quinto nível).

Estabelecemos os seguintes critérios de análise dos dados:

- Classificação dos quadrados – Estarão nesse grupo as figuras C e E;
- Classificação dos retângulos – Figuras C, D, E, F e J;

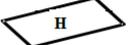
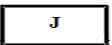
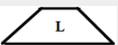
- Classificação dos losangos – Figuras C e E;
- Classificação dos paralelogramos – Figuras B, C, D, E, F, G, H e J;
- Classificação dos trapézios – Figuras A, I e L;
- Classificação dos quadriláteros – Figuras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e L.

4. Análise dos dados produzidos

Para facilitar a análise dos dados, apresentaremos os resultados em seis etapas, a saber: classificação no grupo dos quadrados, classificação no grupo dos retângulos, classificação no grupo dos losangos, classificação no grupo dos paralelogramos, classificação no grupo dos trapézios e classificação no grupo dos quadriláteros.

Em relação à classificação das figuras na família dos quadrados, constatamos que a maioria dos discentes conseguiu reconhecer o quadrado prototípico (figura C), como ilustrado pela Tabela 1. O quadrado “não padrão” (figura E), ou seja, aquele que se apresenta em posição diferente da habitual forma trabalhada em sala de aula, foi considerado por 68% dos discentes.

Tabela 1 – Figuras escolhidas como quadrados

FIGURAS	FREQUÊNCIA
	3%
	97%
	9%
	68%
	9%
	6%
	3%
	9%
	3%

Fonte: Dados da pesquisa

Pesquisas anteriores que investigavam o reconhecimento de quadrados, como em Costa e Câmara dos Santos (2016b), apontam que 38% dos alunos do ensino médio reconhecem essa figura. Já quando a pesquisa é realizada com professores de matemática da educação básica, esse índice aumenta consideravelmente para 96% (COSTA; SANTOS, Câmara, 2016c).

Os resultados da nossa pesquisa, apontados na tabela anterior, indicam que, em média, 82,5% dos estudantes identificaram o quadrado por meio do aspecto global da figura. O resultado quantitativo posiciona os estudantes de licenciatura entre os alunos do ensino médio e os professores da educação básica, descritos nas pesquisas de Costa e Câmara dos Santos (2016b, c). Caracterizamos esses discentes no primeiro nível de pensamento geométrico proposto por Van-Hiele em relação à figura do quadrado. No entanto, acreditamos que esse quadro seja modificado ao longo do curso.

Por outro lado, ainda temos, em média, 3% dos estudantes de licenciatura em matemática que não conseguiram reconhecer visualmente o quadrado prototípico. Já no caso do quadrado não padrão, 32% da turma não conseguiram reconhecê-lo. Até então, tudo leva a crer que esses estudantes apresentam alguma dificuldade conceitual de aprendizagem, pois não identificaram essas figuras geométricas por meio da aparência física. Provavelmente, esse fenômeno pode ter ocorrido porque tais alunos não vivenciaram, de forma significativa, atividades que desenvolvessem o pensamento geométrico, logo, eles precisam de ajuda para atingir o nível 1, o que reforça a necessidade de um estudo mais refinado sobre essa matéria.

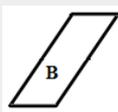
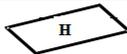
Em média, 9% dos estudantes identificaram os retângulos (figuras D, F e J) no grupo dos quadrados, possivelmente, por também não terem lados “inclinados” ou por realizar uma inclusão de classe inválida, ou seja, considerar que todo retângulo é quadrado. Em relação aos paralelogramos oblíquos (figuras B, G e H) e trapézios, verificamos que, em média, 3,5% dos estudantes consideraram essas figuras como quadrados. Dados semelhantes a esses são encontrados em outras pesquisas.

Esses resultados nos alertaram, pois os retângulos, os paralelogramos oblíquos e os trapézios não se configuram como quadrados, tanto no que se referem a suas aparências, como a suas propriedades. Logo, esses estudantes desenvolveram uma inclusão de classe equivocada entre essas figuras com o

quadrado. O fato de alguns discentes estabelecerem uma inclusão de classe que é não válida no campo da geometria significa que eles trabalham no primeiro nível de Van-Hiele, isto é, eles conseguem reconhecer as figuras pela aparência física, no entanto, ainda não conseguem perceber relações entre as propriedades desses quadriláteros notáveis. Tal característica só é percebida em alunos que atuam no terceiro nível, segundo a Teoria de Van-Hiele descrita na nossa fundamentação teórica.

Em relação à classificação das figuras no grupo dos retângulos, os discentes deveriam indicar quais figuras pertencem a esse grupo. Na tabela a seguir, apresentaremos a frequência, em porcentagem, das figuras reconhecidas como retângulos.

Tabela 2 – Figuras escolhidas como retângulos

FIGURAS	FREQUÊNCIA
	12%
	29%
	97%
	18%
	88%
	6%
	12%
	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos que quase todos os estudantes, em média 98,5% do total, reconheceram visualmente o retângulo em sua posição padrão (figuras D e J), que

Revista Educação Online, Rio de Janeiro, n. 25, mai-ago 2017, p. 63-86

em geral é trabalhado em sala de aula de matemática no ensino básico. O retângulo em formato “não prototípico” (figura F) foi reconhecido com índices um pouco menores, ou seja, 88%. Na maioria das vezes, essa forma do retângulo não é explorada nas classes de matemática na educação básica, o que pode justificar a dificuldade dos estudantes em realizarem a sua identificação pelo aspecto global. Nesse sentido, esses discentes apresentaram características do primeiro nível de Van-Hiele.

Por outro lado, 1,5% dos alunos investigados não conseguiram realizar tal procedimento, isto é, não reconheceram o retângulo prototípico a partir do aspecto global, provavelmente, por não terem vivenciado atividades que possibilitassem o desenvolvimento geométrico, pelo menos para a figura do retângulo. Já em relação ao retângulo não padrão, 12% da turma não o consideraram visualmente. Aqui, parece ficar evidente que esses discentes estão “presos” às figuras prototípicas, logo, é necessário fazer intervenções didáticas que possibilitem o avanço nos níveis de compreensão geométrica.

Entendemos que esses dados são bastante preocupantes, pois esses estudantes deveriam atuar em níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico mais avançados de Van-Hiele (quarto e quinto níveis, respectivamente), para poderem trabalhar com a geometria na educação básica de forma mais adequada e segura.

Os discentes ainda reconheceram os paralelogramos oblíquos (figuras B, H e G) no grupo dos retângulos, com uma média de frequência de 10%. Esses dados parecem mostrar que os alunos realizaram esse tipo de classificação, pois tais figuras geométricas aparentemente apresentam semelhanças (característica do primeiro nível de Van-Hiele), logo, as propriedades das figuras não foram consideradas no processo. Dessa forma, desenvolveram uma inclusão de classe equivocada.

Esse resultado também é alarmante, pois o ideal seria verificar que o estudante de licenciatura em matemática conseguisse perceber que os paralelogramos oblíquos não pertencem à família dos retângulos. Entendemos que o aluno também deve compreender que o retângulo é um paralelogramo com ângulos internos congruentes, estabelecendo, assim, uma inclusão de classe.

Por outro lado, em média, 23,5% dos discentes consideraram os quadrados (figuras C e E) na família dos retângulos, ou seja, conseguiram realizar a inclusão de classe entre esses quadriláteros notáveis, demonstrando o pensamento geométrico característico do terceiro nível de Van-Hiele. Esse fato não ocorreu na pesquisa de Câmara dos Santos (2001), o qual constatou que nenhum estudante do 6º ano do ensino fundamental considerou os quadrados como retângulos. No ensino médio, apenas 6% dos alunos classificaram os quadrados na família dos retângulos (COSTA; SANTOS, 2016b) e, na pesquisa com professores de matemática, 25% estabeleceram essa relação (COSTA; SANTOS, 2016c), dados bastante semelhantes ao encontrado nesta pesquisa, o que reforça a necessidade de mais investigação nesse campo.

Há um grande número de estudantes que não conseguiram reconhecer os quadrados como retângulos (em média, 76,5%), pois, visualmente, são diferentes. Tal fenômeno é preocupante, uma vez que esses discentes demonstram não compreender os elementos básicos das definições e propriedades desses quadriláteros notáveis, o que dificulta o estabelecimento de inclusão de classe. Caso essa realidade não se modifique ao longo do desenvolvimento do curso, poderá comprometer o seu trabalho pedagógico em sala de aula no ensino básico. Nesse sentido, esses dados reforçam nossa hipótese de que eles estão atuando no primeiro nível de Van-Hiele. Segundo esse autor, nesse estágio de desenvolvimento geométrico, o estudante leva em consideração apenas o aspecto visual, sem se preocupar com propriedades e definições.

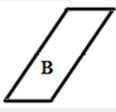
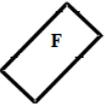
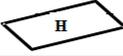
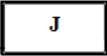
Não identificamos nenhum aluno reconhecendo os trapézios como retângulos. Provavelmente, isso deve ter ocorrido porque as figuras citadas apresentam aparências físicas bem diferentes. Logo, os alunos consideraram o aspecto global dessas figuras como elemento determinante à classificação.

Quanto à classificação das figuras no grupo dos losangos, notamos pela Tabela 3 que, em média, 26% dos alunos identificaram o quadrado prototípico no grupo dos losangos. Esse dado parece evidenciar que esses estudantes desenvolveram a inclusão de classe, correspondente ao terceiro nível da teoria.

Van-Hiele (1999) discute que, no terceiro nível de pensamento geométrico, caracterizado pela ordenação das propriedades das figuras geométricas, o aluno é capaz de reconhecer um quadrado como um tipo especial de losango. Ainda

segundo esse autor, o ideal seria que o estudante estivesse atuando nesse nível ao concluir o ensino básico. Nesse sentido, um discente do ensino superior deveria estar no quarto e no quinto níveis de pensamento, dependendo dos contextos matemáticos que ele houver vivenciado.

Tabela 3 – Figuras escolhidas como losangos

FIGURAS	FREQUÊNCIA
	6%
	26%
	3%
	71%
	3%
	38%
	9%
	3%

Fonte: Dados da pesquisa

Um pouco mais de dois terços dos participantes do estudo, em média 71%, identificaram o quadrado “não padrão” como um tipo especial de losango. Aqui, conjecturamos duas possíveis estratégias mobilizadas pelos estudantes nesse tipo de categorização: a primeira, caracterizada pela inclusão de classe, isto é, ocorreu a articulação entre as propriedades das figuras geométricas, que marca o terceiro nível de pensamento geométrico proposto por Van-Hiele. Na segunda, os discentes reconheceram o quadrilátero apenas pelo aspecto global (característica do primeiro nível vanhieliano), então, eles identificaram a figura como sendo somente um

losango, e não como um quadrado “não prototípico”, que também é losango. Pesquisa realizada por Costa e Câmara dos Santos (2016c) indica que 17% dos professores de matemática identificaram o quadrado em posição prototípica como losango, e 37% perceberam o quadrado não prototípico como sendo um losango, ou seja, parece que a análise dessa figura pela visualização é bastante utilizada entre os docentes, o que poderá causar consequências irreparáveis ao processo de ensino e de aprendizagem da geometria.

Neste estudo, 74% dos estudantes não consideraram o quadrado padrão como losango, provavelmente, por estarem bastante familiarizados com o estudo das figuras prototípicas no ensino básico, logo, apresentam dificuldades em reconhecer um losango com ângulos retos no mesmo posicionamento do quadrado. Concordamos com Rosa dos Santos (2005, p. 25) quando afirma que as figuras prototípicas “podem contribuir no processo de ensino, no sentido de introduzir uma noção, auxiliar no resgate dos conhecimentos prévios [...], mas que precisa ser ampliada para que não gere problemas na aprendizagem.” Dessa forma, parece que o trabalho exaustivo com figuras, seguindo o mesmo padrão, não ajuda no desenvolvimento dos níveis em geometria.

Além disso, quase um terço do total, em média 29%, não conseguiram realizar esse reconhecimento visual do quadrado não prototípico como losango, o que reforça a possibilidade de esses alunos não atuarem no primeiro nível de Van-Hiele. Qualquer aluno que atue nesse nível consegue realizar tal procedimento, pois a aparência física dessas duas figuras é a mesma. Esse dado reforça a necessidade de um estudo mais profundo, buscando compreender melhor as dificuldades desses alunos em relação ao losango.

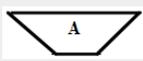
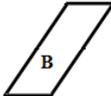
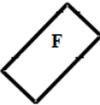
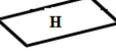
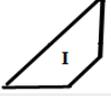
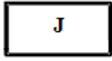
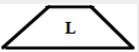
Os paralelogramos oblíquos foram identificados na classe dos losangos por, em média, 17,7% dos discentes. Tal fato pode ter ocorrido, pois, visualmente, esses quadriláteros notáveis apresentam lados “inclinados”. Os retângulos foram reconhecidos por 3%, em média, para cada tipo. Mais uma vez, esses dados nos mostram que os alunos entrevistados apresentam lacunas conceituais, portanto, são necessárias intervenções didáticas, para que eles alcancem níveis de Van-Hiele mais apropriados ao seu nível de escolaridade.

Em relação à classificação das figuras na família dos trapézios, como podemos perceber na tabela abaixo (Tabela 4), todos os trapézios foram

reconhecidos visualmente pela maioria dos estudantes (96% da turma), inclusive aqueles que estavam em posição não prototípica.

Enquanto isso, os dados também mostram que, em média, 4% dos estudantes não conseguiram identificar o trapézio pela aparência física dessa figura, evidenciando que eles ainda não alcançaram o primeiro nível de Van-Hiele, pelo menos em relação aos trapézios.

Tabela 4 – Figuras escolhidas como trapézios

FIGURAS	FREQUÊNCIA
 A	97%
 B	6%
 C	6%
 D	6%
 E	6%
 F	9%
 G	3%
 H	3%
 I	97%
 J	6%
 L	94%

Fonte: Dados da pesquisa

Os paralelogramos oblíquos (figuras B e H) foram considerados na família dos trapézios por 4,5% dos participantes. Isso foi verificado entre quase 9% dos participantes do estudo de Costa e Câmara dos Santos (2016b). No que se refere aos quadrados, prototípico e não padrão (figura C e E, respectivamente), 6% dos discentes os consideraram como trapézio. Já em Costa e Câmara dos Santos (2016b), esse índice caiu para 2,5%. Esse fenômeno pode ter acontecido porque, dependendo da posição na folha de caderno, o paralelogramo, o quadrado não prototípico e o trapézio, visualmente, possuem lados inclinados. Aqui, mais uma vez, esses estudantes demonstraram que não alcançaram o primeiro nível de Van-Hiele.

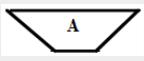
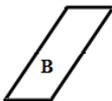
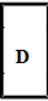
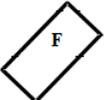
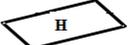
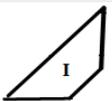
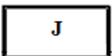
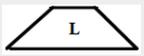
Esses dados também nos alertaram, uma vez que os quadriláteros notáveis são formados por duas famílias: a dos paralelogramos (que inclui quadrados, losangos e retângulos) e a dos trapézios. Nesta pesquisa, consideramos o trapézio exatamente com um único par de lados paralelos; tal aspecto o diferencia do paralelogramo, que possui dois pares de lados opostos paralelos entre si. Essa definição de trapézio é amplamente trabalhada nas escolas pernambucanas, o que reforça estudos mais aprofundados sobre o tema.

Entendemos que os discentes não deveriam considerar o paralelogramo oblíquo e o quadrado na classe do trapézio, realizando, assim, uma inclusão de classe que não é válida no contexto da definição de trapézio utilizada nesta pesquisa.

Os retângulos também foram identificados na classe dos trapézios por uma média de 7% dos participantes, realizando uma inclusão de classe inválida. Em Costa e Câmara dos Santos (2016b), esse fenômeno ocorreu entre 3% dos alunos do ensino médio investigados. Novamente, esses resultados são alarmantes, já que estudantes do ensino superior e do curso de matemática não deveriam realizar esse tipo de classificação, pois são quadriláteros que apresentam aspecto global e propriedades diferentes. É preciso aprofundar o estudo sobre isso, buscando compreender o que levou esses estudantes a realizarem esse tipo de classificação.

Por fim, em relação à classificação das figuras na família dos paralelogramos, pela Tabela 5, percebemos que a grande maioria (em média, 86,33%) dos participantes do estudo reconheceu os paralelogramos oblíquos (figuras B, G e H) por meio da aparência física, que marca o primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Tabela 5 – Figuras escolhidas como paralelogramos

FIGURAS	FREQUÊNCIA
 A	9%
 B	94%
 C	24%
 D	26%
 E	24%
 F	35%
 G	74%
 H	91%
 I	3%
 J	24%
 L	6%

Fonte: Dados da pesquisa

Enquanto isso, 13,67% dos alunos, em média, não reconheceram os paralelogramos oblíquos a partir do seu aspecto global, o que reforça, mais uma vez, a necessidade de intervenção didática referente ao estudo dessa figura.

Os trapézios foram identificados na classe dos paralelogramos pelos discentes, apresentando frequência média de 6%. Os alunos podem ter realizado esse tipo de classificação, porque esses dois tipos de quadriláteros notáveis possuem, aparentemente, “lados inclinados”. No entanto, é importante destacar que o trapézio não se enquadra na classe dos paralelogramos pela definição utilizada neste estudo, pois não apresenta dois pares de lados opostos paralelos entre si. Nesse caso, esses estudantes realizaram uma inclusão de classe inválida.

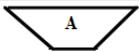
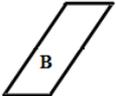
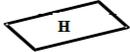
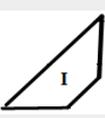
Em relação aos retângulos, menos de um terço dos estudantes (uma média de 28,33%) consideraram essas figuras geométricas enquanto paralelogramos, enquanto 71,67% da turma não conseguiram realizar essa classificação, pois, provavelmente, ainda atuam no primeiro nível vanhieliano.

Os dados acima nos chamaram a atenção, pois, considerando, por exemplo, as propriedades do retângulo e do paralelogramo, o estudante poderá concluir que o ‘retângulo é todo paralelogramo com ângulos internos congruentes’ (COSTA, 2016), estabelecendo, assim, a inclusão de classe (característica do terceiro nível de Van-Hiele). O ideal seria que um maior número de discentes em matemática tivesse realizado tal procedimento. Como isso não aconteceu, sugerimos a realização de atividades que possibilitarão o avanço no nível de desenvolvimento geométrico estabelecido pela Teoria de Van-Hiele.

Ainda observamos que 24% dos alunos, em média, consideraram os quadrados (prototípico e “não padrão”) no grupo dos paralelogramos, realizando novamente a inclusão de classe, aspecto do terceiro nível de Van-Hiele. Já a maioria dos estudantes, em média 76%, não reconheceram os quadrados como paralelogramos, o que não é de se esperar para o nível escolar desses participantes.

Em relação à classificação dos estudantes para a família dos quadriláteros, constatamos que a maior parte (em média 84,73%) dos estudantes da licenciatura em matemática foi capaz de reconhecer todas as figuras planas enquanto quadriláteros, como podemos perceber na tabela a seguir.

Tabela 6 – Figuras escolhidas como quadriláteros

FIGURAS	FREQUÊNCIA
	79%
	85%
	94%
	82%
	88%
	88%
	79%
	85%
	82%
	88%
	82%

Fonte: Dados da pesquisa

Contudo, há um número de discentes que não conseguiu realizar essa categorização, o que pode evidenciar dificuldades conceituais de aprendizagem, no que se refere aos quadriláteros notáveis. Supomos que esses alunos não alcançaram o primeiro nível de Van-Hiele, pelo menos em sua amplitude e para esse tipo de problema. Isso exige um estudo mais refinado, a fim de compreender em profundidade os reais motivos dessas dificuldades.

Cerca de quatro quintos do total de discentes reconheceram os paralelogramos (82%) e os trapézios (81%) como quadriláteros. Enquanto isso, quase 18,5% dos estudantes não conseguiram identificar visualmente essas figuras como quadriláteros. Acreditamos que esses alunos, especificamente em relação a essa figura, ainda não trabalham no primeiro nível de Van-Hiele.

Quanto aos quadrados, percebemos que mais de 91% dos alunos identificaram essas figuras como quadrilátero. O quadrado padrão (figura C) foi identificado como quadrilátero por 94% da turma, enquanto o “não prototípico” (figura E) foi classificado no grupo por 88%. Os retângulos foram considerados quadriláteros por 86% dos discentes investigados. Enquanto isso, cerca de 9% dos estudantes não consideraram os quadrados como quadriláteros. Já 14% deles não identificaram os retângulos como quadriláteros. Tais dados parecem mostrar que esses participantes atuam em um nível mais básico daquele proposto por Van-Hiele.

Portanto, é possível afirmar que, se por um lado, temos estudantes no segundo nível – pois identificam figuras por meio das suas propriedades e definições –, por outro, também há um grupo de estudantes que identificam as figuras por meio do seu aspecto físico, o que caracteriza o primeiro nível. Logo, sugerimos mais intervenções didáticas para que seja possível um avanço mais significativo no desenvolvimento do pensamento geométrico.

5. Considerações finais

Ao iniciar a pesquisa, tínhamos por problemática investigar se estudantes de uma licenciatura em matemática, que já estudaram disciplinas referentes à geometria, estavam em níveis mais avançados de desenvolvimento do pensamento geométrico, pois, segundo a teoria adotada neste trabalho, os estudantes cursando ensino superior, particularmente de matemática, atuam em níveis de maior complexidade.

Nesse sentido, esta pesquisa buscou, de forma mais específica, identificar em que nível de pensamento geométrico se situa os participantes. Para isso, aplicamos um teste com 24 estudantes de uma licenciatura em matemática no estado de Pernambuco, envolvendo a classificação de figuras quadriláteras, especificamente notáveis, ou seja, quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio.

Identificamos que a maioria desses estudantes está atuando no primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele, em que ocorre o reconhecimento das figuras geométricas a partir de seu aspecto global. Tal fato pode ser ilustrado na classificação das figuras no grupo dos retângulos: 76,5% desses discentes não reconheceram os quadrados como retângulos, ou seja, não realizam, ainda, a inclusão de classe.

Diversas pesquisas na área de educação matemática têm apontado que esse fenômeno não ocorre de modo isolado, isto é, pessoas de diferentes escolaridades, do ensino básico ao ensino superior, apresentam dificuldades para desenvolver a inclusão de classe relacionada aos quadriláteros notáveis, o que demanda um estudo futuro que busque analisar a origem epistemológica e a raiz didática dessas dificuldades.

No mesmo sentido, identificamos situações em que os estudantes apresentaram dificuldades em classificar os quadrados na família dos retângulos e reconhecer o quadrado como um caso particular de losango. Nessa direção, nos parece evidente que esses estudantes apresentam alguma dificuldade conceitual de aprendizagem referente aos quadriláteros notáveis.

Também identificamos discentes trabalhando, de forma consolidada, no terceiro nível vanhieliano (23%), pois consideraram os quadrados (figuras C e E) na família dos retângulos, ou seja, conseguiram realizar a inclusão de classe entre esses quadriláteros notáveis.

Além disso, menos de 10% dos participantes parece que ainda não estão atuando no primeiro nível de Van-Hiele, o que pode ser constatado, por exemplo, nas produções referentes à classificação das figuras no grupo dos trapézios, em que 6% da turma consideraram o quadrado padrão nessa família. Tal fato reforça a hipótese sobre a possível existência de um nível mais básico de desenvolvimento do pensamento geométrico, daquele proposto por Van-Hiele (1957).

Analisando a pesquisa, de forma geral, os resultados constatados sinalizam que, mesmo havendo um resgate hoje do ensino da geometria nas escolas, nos parece que a aprendizagem desse campo da matemática ainda não se dá de forma significativa.

Consideramos que esses resultados são bastante preocupantes, pois, segundo Van-Hiele, os discentes deveriam estar trabalhando no quarto e no quinto

níveis de pensamento geométrico. No caso deste estudo, parece que a geometria vivenciada pelos estudantes durante sua formação não contribuiu de forma significativa, para que eles avançassem para os níveis vanhielianos mais elaborados.

Portanto, sugerimos que, nas próximas pesquisas, esses estudantes sejam submetidos a sequências de atividades que fortaleçam a aprendizagem de conceitos da geometria, sobretudo aos estudos de quadriláteros (classificação e inclusão de classes), e que essas atividades utilizem tanto figuras prototípicas, como figuras não padrão. Sendo assim, a partir dessas sequências, esperamos que os futuros professores de matemática da educação básica desenvolvam práticas docentes mais efetivas em relação à geometria em sala de aula.

Referências bibliográficas

BRASIL. MEC. 1998. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. 3ªed. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. 2015. *SAEB – 2015. Matemática*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206> Acesso em: 27 fev 2017.

CONCEIÇÃO, D. A.; OLIVEIRA, K. P. *Uma análise do nível do conhecimento geométrico dos professores de matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer*. 2014. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade de Pernambuco. Nazaré da Mata, 2014.

COSTA, A. P. *A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana*. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016.

COSTA, A. P.; SANTOS, M. Câmara dos. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. In. CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., Tuxtla Gutiérrez, México, 2015. *Anais...* Tuxtla Gutiérrez: Comité Interamericano de Educación Matemática, 2015a.

_____. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. In. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., Ilhéus, Bahia, 2015. *Anais...* Ilhéus: PPGEM/UESC, 2015b.

_____. Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do

ensino fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v.5, p.3-17, 2016a.

COSTA, A. P.; SANTOS, M. Câmara dos. Níveis de pensamento geométrico de alunos do ensino médio no estado de Pernambuco: um estudo sob o olhar vanhieliano. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v.7, p.1-19, 2016b.

_____. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. *Educação Online*, Rio de Janeiro, n.22, pp.1-19, 2016c.

COSTA, A. P.; SANTOS, M. Rosa dos Um estudo sobre o pensamento geométrico de estudantes de licenciatura em matemática no estado de Pernambuco. In. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., São Paulo-SP, 2016. *Anais...* São Paulo: SBEM – Regional SP, 2016.

JEHIN, M. D.; CHENU, F. Comment évaluer le raisonnement géométrique?. *Cahiers du Service de Pédagogie Expérimentale*, Université de Liège, v.3, n.4, p. 67-85, 2000.

OECD. PISA. 2015. *PISA: Results in Focus*. Organisation for Economic Co-operation and Development: OECD, 2015. Disponível em: <<https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf>> Acesso em: 27 fev 2017.

PERNAMBUCO. Secretaria da Educação. SAEPE – 2015. Matemática. *Revista da Gestão Escolar*, v. 2, n.1, p. 1-22, jan-dez 2015. Disponível em: <<http://www.saepe.caedufjf.net/wp-content/uploads/2016/05/PE-SAEPE-2015-RG-RE-WEB2.pdf>>. Acesso em: 27 fev 2017.

_____. *Parâmetros para a educação básica do estado de Pernambuco: Parâmetros curriculares de matemática para o ensino fundamental e médio*. Juiz de Fora: UFJF, 2012.

REZENDE, D. P. L. Ensino e aprendizagem de geometria: uma proposta para o estudo de polígonos nos anos finais do ensino fundamental. In. ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19., Juiz de Fora, 2015. *Anais...* Juiz de Fora: UFJF, 2015.

SANTOS, M. Câmara dos. *Analyse didactique d'un matériel pour les premiers apprentissages en géométrie*. Mémoire de master en didactique des disciplines scientifiques. Lyon: Université Claude Bernarde Lyon 1, 1992.

_____. Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le développement de la pensée géométrique. In. CONGRES INTERNATIONAL CABRI GÉOMÈTRE, 2., Montreal, Canadá, 2001. *Annales...* Montreal: Cabri World Committee, 2001.

_____. Evoluindo nos níveis de Van-Hiele: o caso dos quadriláteros. In. CONGRESSO IBEROAMERICANO DE CABRI-GÉOMÈTRE, 1., Santiago, Chile, 2002. *Anais...* Santiago: IBEROCABRI, 2002.

_____. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Orgs.). *A pesquisa em educação matemática: repercussões na sala de aula*. São Paulo: Cortez, 2009. p.177-211.

SANTOS, M. Rosa dos. *Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas*. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2005.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de geometria: rumos da pesquisa (1991-2011). *REVEMAT*, v.8, n.1, p. 138-155, 2013.

SOUZA, K.R.; KERBAUY, M.T.M. Abordagem quanti-qualitativa: superação da dicotomia quantitativa-qualitativa na pesquisa em educação. *Educação e Filosofia*, v.31, n.61, p.1-19, 2017.

VAN-HIELE, P. M. *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. 1957. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad Real de Utrecht. Utrecht, 1957.

_____. Developing geometry thinking through activities that. *Teaching Children Mathematics*, v. 6, p. 310-316, 1999.