O pensamento geométrico de professores de matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis

The geometric thinking of basic education math teachers: a study of notable quadrilaterals

André Pereira da Costa
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife (PE) - Brasil
Marcelo Câmara dos Santos
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife (PE) - Brasil

Resumo
Esta investigação analisou os níveis de pensamento geométrico de um grupo de 24 professores de matemática do ensino básico do Alto Sertão da Paraíba, a partir de um teste sobre o conceito de quadriláteros notáveis. Optamos, como sustentação teórica, pela Teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Os dados produzidos na pesquisa mostram que a maioria dos professores participantes do estudo se encontrava no primeiro nível de pensamento geométrico da teoria de Van-Hiele, caracterizado pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir de suas aparências físicas. Assim, parece que o conhecimento desses professores sobre os quadriláteros notáveis é bastante frágil, o que pode dificultar o seu trabalho em sala de aula.
Palavras-chave: Professores, Pensamento geométrico, Van-Hiele, Quadriláteros, Aparência

Abstract
This research has analyzed the geometric thinking levels of a group of 24 Basic Education mathematics teachers of High backwoods of Paraíba, from a test about the concept of remarkable quadrilaterals. The Van-Hiele theory has been chosen as theoretical support to the development of geometric thinking. The data resulted from the research show that most of the teachers participating in the study are at first level of Van-Hiele theory geometric thinking, characterized by the recognition of geometric figures through their physical appearances. So it seems that the knowledge of these teachers about the remarkable quadrilaterals is quite fragile, which can hamper their work in classroom.
Keywords: Teachers, Geometric thinking, Van-Hiele, Quadrilaterals, Appearance.

1. Introdução

A geometria pode ser encontrada em diversas representações na realidade física, além de ser um conhecimento matemático bastante mobilizado pelo ser humano na resolução de problemas e em inúmeras situações do cotidiano. Nesse sentido, esse ramo da matemática possui um papel primordial na formação humana e profissional dos estudantes, em todos os níveis de escolarização, o que reforça a importância de sua presença no currículo escolar do ensino básico (COSTA, 2016a).

Apesar dessa importância, a geometria ficou excluída das salas de aula na educação básica por quase quarenta anos, em decorrência do Movimento da Matemática Moderna no final da década de 1960 e de lacunas conceituais nos cursos de formação de professores de matemática (CÂMARA DOS SANTOS, 2009). Muitos desses profissionais apresentavam dificuldades para trabalhar os conceitos geométricos em sala de aula.

Todavia, no final dos anos 1990, esse panorama começou a mudar a partir de inquietações de vários educadores matemáticos brasileiros, que passaram a desenvolver pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem da geometria de forma mais ampla (NASSER; S'ANTANNA, 1997; NASSER, 1998; CÂMARA DOS SANTOS, 1998; KALEFF, 1998; PAVANELLO, 1999, GAZIRE, 2000), contribuindo tanto para o trabalho do professor em sala de aula como também para os cursos de formação inicial e continuada.

Por outro lado, alguns estudos (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b) têm evidenciado que alunos do ensino básico continuam apresentando dificuldades conceituais e de aprendizagem referentes à geometria, em especial, no que diz respeito aos quadriláteros notáveis. Tal fenômeno nos provoca algumas questões para reflexão: Como os professores de matemática trabalham hoje os conteúdos escolares vinculados à geometria? Será que eles ainda abordam os conceitos geométricos de forma tímida? Quais conhecimentos de geometria eles possuem? Em que níveis de pensamento geométrico se encontram esses profissionais?

Neste trabalho, buscamos responder o último questionamento, isto é, objetivamos analisar os níveis de pensamento geométrico de um grupo de professores de matemática do ensino básico do Alto Sertão da Paraíba, a partir de um teste referente ao conceito de quadriláteros notáveis. Para tanto, optamos pela sustentação teórica da Teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, que tem sido utilizada em várias pesquisas no Brasil (COSTA, 2016b), na compreensão dos fenômenos didáticos que surgem nas aulas de geometria.

Além disso, o nosso interesse por realizar a pesquisa nessa região específica da Paraíba surgiu a partir dos resultados apresentados pelo Sistema Estadual de Avaliação da Educação da Paraíba (PARAÍBA, 2014), avaliando o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica da Paraíba (Idepb), que aponta que os alunos do ensino básico da região não apresentam um bom desempenho em matemática e, particularmente, em geometria.

Diante desses indicadores educacionais, reforçamos a importância de se investigar sobre os reais motivos geradores dos baixos desempenhos dos estudantes, bem como a maneira como a matemática é vivenciada em sala de aula.

2. Referencial teórico

A teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico foi elaborada pelos pesquisadores holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf, em 1957, tendo por raiz os estudos do psicólogo suíço Jean Piaget acerca do desenvolvimento da inteligência. Esses investigadores voltaram seus olhares para suas próprias salas de aulas, buscando compreender de forma mais refinada as dificuldades dos seus alunos do ensino básico ao resolver tarefas que explorassem os conceitos do campo da geometria. A questão central dos estudos do casal Van-Hiele foi: “Por que será que tantos estudantes que dominam a maioria dos assuntos escolares não chegam a lugar nenhum em geometria?” (NASSER, 1990, p.1).

Buscando respostas para esse questionamento, Van-Hiele (1957) percebeu que o pensamento geométrico de um estudante avança por meio de uma sequência hierárquica de níveis de compreensão de conceitos geométricos, à medida que ele tem contato com atividades que trabalham a geometria de forma adequada. Dessa forma, ao contrário da teoria de Piaget, a idade e a maturação biológica do aluno não influenciam o desenvolvimento do seu pensamento geométrico (COSTA, 2014).

Dessa forma, Van-Hiele (1957) elaborou um modelo teórico, constituído por um total de cinco níveis de pensamento geométrico, que inclui desde o reconhecimento das figuras geométricas pela sua aparência física até o estudo abstrato da geometria.

A teoria de Van-Hiele pode ser um guia de orientação aos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, pois, a partir do conhecimento das características dos níveis de pensamento geométrico dos estudantes, o professor de matemática poderá organizar, de forma mais produtiva, as situações didáticas a serem vivenciadas em sala de aula, de forma a garantir uma melhor aprendizagem aos alunos (COSTA, 2016a).

> Os Van Hiele assinalam que, numa sala de aula, cada aluno pensa em diferentes níveis e, além disso, eles apresentam modos de pensar diferentes dos professores, pois costumam utilizar com frequência palavras e objetos distintos dos empregados pelos professores e livros. Deste modo, o assunto não é bem assimilado e não fica retido por muito tempo na memória. (ALVES; SAMPAIO, 2010, p.30)

Diante disso, para que ocorra uma aprendizagem significativa aliada ao avanço do pensamento geométrico, é fundamental que o curso de geometria a ser vivenciado esteja de acordo com o nível dos alunos, isto é, o tripé professor-aluno-saber deve estar bem articulado na sala de aula. O Quadro 01, que apresenta os níveis de Van-Hiele e seus relativos comportamentos, foi elaborado a partir do texto de Atebe e Schafer (2008) e traduzido do inglês para o português pelos autores deste estudo.

Quadro 01 – Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

NÍVEL	DESCRIÇÃO
Primeiro nível	Neste nível, o aluno reconhece uma figura geométrica apenas por sua aparência. A figura é vista como um todo, reconhecível pela sua forma visível. As propriedades de uma figura geométrica ainda não são percebidas pelo aluno.
Segundo nível	O aluno neste nível é capaz de raciocinar sobre uma figura geométrica em termos de suas propriedades. O estudante pode reconhecer e nomear as propriedades de uma figura, mas ainda não compreender as relações entre essas propriedades. As relações entre diferentes figuras ainda não são entendidas.
Terceiro nível	Neste nível, o aluno pode ordenar logicamente as propriedades de figuras e começa a perceber as relações entre essas propriedades e entre diferentes figuras. O aluno usa as propriedades que já

	conhece para formular definições de figuras geométricas simples, e compreende inclusões de classe. O papel e a importância da dedução, no entanto, ainda não são compreendidos.
Quarto nível	O aluno pode apreciar o papel da dedução e agora pode provar teoremas dedutivamente. Entende o significado de condições necessárias e suficientes e pode estabelecer inter-relações entre as redes de teoremas.
Quinto nível	O estudante pode estabelecer teoremas em diferentes sistemas axiomáticos. Compreende o papel e a importância das provas indiretas. Geometrias não euclidianas podem ser estudadas e sistemas diferentes podem ser comparados.

Fonte: Atebe e Schafer (2008, p. 49)

Os níveis de pensamento geométrico são hierárquicos, no sentido de que, para alcançar um nível de pensamento mais elaborado, o estudante tem que ter passado por níveis de pensamento menos elaborados. Além disso, cada nível é caracterizado por um vocabulário próprio, e os conceitos geométricos também apresentam *status* diferentes (NASSER, 1995).

De acordo com os níveis de Van-Hiele, um professor de matemática deverá ser capaz de realizar provas de teoremas de forma dedutiva e estabelecer teoremas em diferentes axiomas, que são características dos dois últimos níveis de pensamento geométrico.

3. Metodologia

Com uma abordagem qualitativa, esta pesquisa teve a participação de 24 professores de matemática, que, na época, atuavam em escolas públicas e privadas de sete municípios do Alto Sertão da Paraíba: Cajazeiras (07), Sousa (05), Cachoeira dos Índios (03), São José de Piranhas (03), São João do Rio do Peixe (03), Nazarezinho (01), São Francisco (01) e Monte Horebe (01).

Sobre a formação acadêmica desses profissionais, no período da coleta de dados, sete eram estudantes do 8º período de licenciatura em matemática e 17 eram licenciados em ciências com habilitação em matemática. Os cursos de formação de professores mencionados eram vinculados a três instituições públicas de ensino superior localizadas no sertão paraibano.

É importante destacar que os participantes do estudo eram alunos de um curso de formação continuada sobre educação matemática, ofertada por uma instituição universitária da região de Cajazeiras - Paraíba. O curso completo teve duração de 12 meses e foi realizado entre os anos de 2014 e 2015.

O primeiro autor deste estudo foi convidado pela coordenação de formação continuada da unidade de ensino superior para ministrar um seminário referente ao ensino e à aprendizagem da geometria. Com duração de duas horas, o seminário foi realizado em janeiro de 2015 e contou com a participação de 24 professores[1].

Nesse seminário, discutimos sobre a teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico e suas implicações para os processos de ensino e de aprendizagem da geometria. Também foram apresentados resultados parciais de dois estudos[2] realizados em Pernambuco, que discutiam o desempenho de alunos do ensino básico em relação a um teste sobre geometria. Aproveitando a oportunidade, aplicamos o mesmo teste com os docentes presentes no curso, antes do início da conferência.

A faixa etária dos professores variava entre 22 e 45 anos de idade, sendo 12 do sexo feminino e 12 do sexo masculino. Em relação ao tempo de experiência, esses profissionais apresentavam desde um até 20 anos de sala de aula, como ilustrado na Tabela 01.

Tabela 01 – Tempo de experiência em sala de aula por nível de escolarização (em quantidade de professores)

NÍVEIS ESCOLARES	**TEMPO DE EXPERIÊNCIA DOCENTE**		
	De 1 a 3 anos	De 4 a 6 anos	De 14 a 20 anos
Apenas no ensino fundamental (anos finais)	03	02	-
Apenas no ensino médio	03	01	-
Apenas na Educação de Jovens e Adultos	01	-	-

[1] Segundo a IES, eram 32 docentes matriculados no curso. No seminário, estiveram presentes 24 profissionais (logo, oito faltaram).
[2] Tais estudos foram publicados posteriormente nos anais da XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a) e do IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015b).

(EJA)			
Ensino fundamental e ensino médio	01	01	-
Ensino médio e EJA	01	-	02
Ensino fundamental, ensino médio e normal médio	01	-	-

Fonte: Dados da pesquisa

Pela Tabela 01, verificamos que a maioria dos professores, um total de 10 sujeitos, possuía de 1 a 3 anos de experiência como docentes; quatro profissionais lecionavam de 4 a 6 anos, e apenas dois docentes trabalhavam entre 14 e 20 anos. Além disso, no período da coleta dos dados, os participantes do estudo atuavam como professores em diversos níveis escolares: anos finais do ensino fundamental, ensino médio, EJA e normal médio (antigo magistério, curso de formação de professores para a educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental).

Nesta pesquisa, não nos interessamos em avaliar as Instituições de Ensino Superior (IES) que ofertaram os cursos de licenciatura aos docentes (integrantes do estudo). Nesse sentido, não fazemos referência aos nomes das IES, preservando suas identidades.

Empregamos como instrumento de coleta de dados um teste constituído por cinco questões sobre o conceito de quadriláteros notáveis. Salientamos ainda que essas questões foram elaboradas por Câmara dos Santos (2001a)[3], em um estudo que também teve por base a teoria de Van-Hiele.

A finalidade do teste foi identificar os níveis de pensamento geométrico dos professores, cuja análise completa pode ser observada no próximo tópico.

[3] Câmara dos Santos (2001a) investigou os efeitos do *software* Cabri-Géomètre no desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes de duas turmas do 6º ano do ensino fundamental, em uma escola pública federal de Recife (Pernambuco). Para isso, aplicou uma sequência didática referente ao conceito de quadriláteros notáveis, e, por meio de um pré-teste e pós-teste, o pesquisador verificou que os estudantes avançaram significativamente em suas aprendizagens geométricas.

4. Análise dos dados produzidos

Na primeira questão, em uma primeira etapa, os professores foram orientados a produzirem um retângulo e outra figura de quatro lados (não retângulo). Na segunda etapa, os participantes foram solicitados a justificar as construções, isto é, explicar por que a primeira figura era um retângulo e o motivo de a segunda não ser um retângulo. Aqui, o item buscou verificar os critérios utilizados pelos docentes para diferenciar as duas representações. A Tabela 2 apresenta a relação dos quadriláteros considerados como não retângulos pelos docentes.

Tabela 2 - Quadriláteros considerados não retângulos

QUADRILÁTEROS	FREQUÊNCIA
Quadrado	46%
Trapézio	21%
Paralelogramo	17%
Losango	12%
Trapezoide	4%

Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos pela tabela que o quadrilátero notável considerado como um não retângulo mais mobilizado pelos professores foi o quadrado, apresentando uma frequência de 46% entre o total de participantes do estudo. Esse primeiro dado nos chamou bastante a atenção, pois quase a metade dos docentes não conseguiu reconhecer um quadrado como um retângulo, o que nos dá indício que eles têm dificuldades em realizar a ordenação das propriedades desses dois quadriláteros. Esses professores parecem demonstrar o pensamento geométrico do primeiro nível de Van-Hiele, nesse sentido, eles distinguiram o quadrado e o retângulo a partir do aspecto global.

Em sua pesquisa, Câmara dos Santos (2001a) também observou que o quadrado foi a figura geométrica mais frequente entre os alunos do 6º ano do ensino fundamental, “mostrando não somente a importância dessa figura no universo do aluno, como também a concepção que os quadrados não se enquadram na categoria dos retângulos” (2001b, p.11).

O trapézio foi considerado como um não retângulo por 21% dos professores, enquanto o paralelogramo (com ângulos não retos) foi produzido por 17% do total. Em seguida, o losango foi indicado como um não retângulo por 12% dos docentes, e a trapezoide por cerca de 4%. Aqui os dados parecem evidenciar que esses professores buscaram características próprias das figuras como forma de diferenciação.

Na análise das justificativas dos professores, consideramos as categorias criadas por Câmara dos Santos (2001a). Nessa classificação, as respostas dos docentes foram organizadas em três esferas: pragmática, aplicativa e relacional (conforme o Quadro 2).

Quadro 2 - Classificação das justificativas dos professores, conforme Câmara dos Santos (2001)

ESFERAS	DESCRIÇÃO	EXEMPLO
Pragmática	Os sujeitos fazem uso das aparências e formas das figuras nas justificativas.	O docente pode afirmar que o retângulo e o quadrado são figuras diferentes, pois possuem tamanhos divergentes.
Aplicativa	Os participantes utilizaram as definições das figuras nas explicações.	Ao construir um retângulo e um losango, o docente pode argumentar que o retângulo possui quatro ângulos internos congruentes (retos), enquanto o losango possui quatro lados congruentes.
Relacional	Os docentes empregam as propriedades das figuras desenhadas nas explicitações.	Ao construir novamente um retângulo e um losango, o professor pode afirmar que são diferentes, pois, enquanto as diagonais do losango são perpendiculares, as do retângulo são concorrentes.

Fonte: Costa e Câmara dos Santos (2015a, p.6).

Na Tabela 3, podemos encontrar a frequência dos tipos de explicações dos professores, conforme a classificação de Câmara dos Santos (2001a)[4].

[4] Em um primeiro momento de sua pesquisa, Câmara dos Santos (2001a) observou que a metade dos estudantes se localizava na esfera pragmática e a outra metade na esfera aplicativa, assim, não foram encontrados alunos na esfera relacional.

Tabela 3 - Frequência das respostas dos professores em esferas

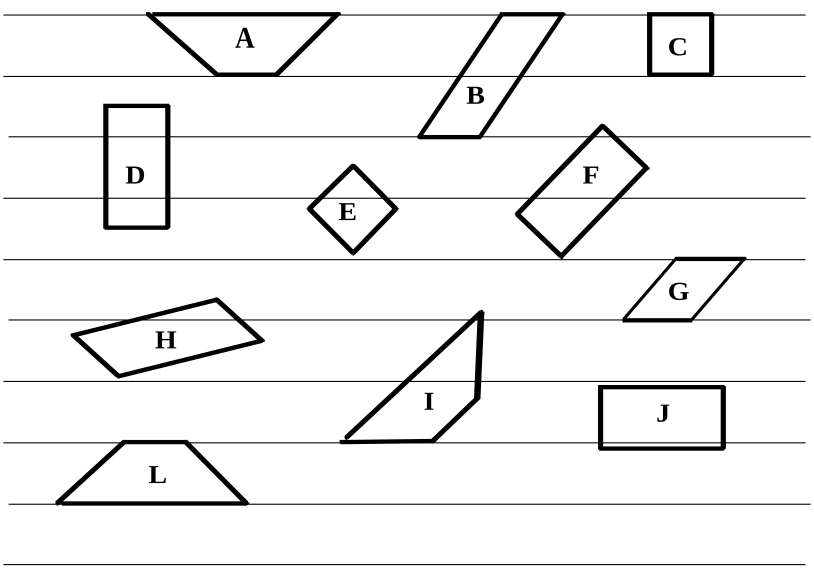
ESFERAS	FREQUÊNCIA
Pragmática	4%
Aplicativa	79%
Relacional	17%

Fonte: Dados da pesquisa

Pela tabela, percebemos que entre os 24 docentes de Matemática, apenas 4% se encontravam na esfera pragmática, ou seja, fizeram uso da aparência física dos quadriláteros notáveis. A maioria, isto é, 79% do total estavam na esfera aplicativa (fez referência à definição das figuras), enquanto 17% estavam na relacional, na qual mencionaram as propriedades dos quadriláteros.

Na segunda questão do teste, os professores foram recomendados a realizar a classificação de onze quadriláteros, de naturezas e posições diferentes, em seis grupos de família (retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos), ilustrados na Figura 01. O intuito da questão foi analisar se os docentes distinguiam as figuras em classes de família.

Figura 01 – Quadriláteros notáveis disponibilizados para a classificação em famílias



Fonte: Câmara dos Santos (2009)

Todos os participantes reconheceram o retângulo (em posição padrão ou não). Além disso, 25% dos professores consideraram o quadrado padrão (com os lados paralelos às bordas horizontais da folha de papel, representado pela figura C) e o quadrado “não padrão” (figura E) no grupo dos retângulos, isto é, a cada grupo de quatro professores, três não foram capazes de identificar os quadrados como retângulos. Aqui parece ficar bastante claro que esses professores mobilizam apenas a aparência global das figuras, dessa forma, não conseguem perceber que todo quadrado é retângulo.

Em Câmara dos Santos (2001a), nenhum estudante reconheceu os quadrados como sendo retângulos, o que chamou muito a atenção do pesquisador. Esse resultado reforça a necessidade de se investigar de forma mais aprofundada sobre as dificuldades dos estudantes do Ensino Básico em realizar a inclusão de classe.

No que diz respeito aos quadrados, verificamos que o quadrado padrão (em posição prototípica) foi reconhecido por todos os professores, enquanto o quadrado não padrão (em posicionamento não prototípico) foi identificado por 96% dos praticantes. Então, 4% dos docentes têm dificuldades de reconhecer o quadrado que não apresente os lados paralelos às bordas horizontais da folha de papel.

Os paralelogramos foram reconhecidos por uma média de 80% dos docentes, enquanto os retângulos foram considerados paralelogramos pela metade dos participantes do estudo (50%). Os quadrados foram identificados na classe dos paralelogramos por 46% dos professores.

Aqui percebemos que menos da metade dos professores conseguiram fazer a inclusão de classe (característica do terceiro nível de Van-Hiele). Por outro lado, um considerável número de docentes não conseguiu reconhecer os retângulos e os quadrados como paralelogramos, provavelmente, por apresentarem aparências físicas diferentes.

Em relação à categorização dos quadriláteros notáveis no grupo dos losangos, percebemos que somente 37% dos docentes conseguiram reconhecer o quadrado “não padrão”. O quadrado em posição prototípica foi classificado como losango por 17% dos participantes, em média. Esse dado também nos chamou atenção, pois a maior parte dos professores tem dificuldades em considerar o quadrado como um tipo especial de losango, isto é, um losango com ângulos retos.

Tais dificuldades também foram percebidas na pesquisa de Câmara dos Santos (2001a), na qual, em um primeiro momento, apenas 3% dos estudantes do 6º ano consideraram o quadrado como sendo um tipo especial de losango.

Além disso, 38% dos docentes reconheceram os paralelogramos (não losangos) na família dos losangos e, ainda, 4% consideraram um tipo de retângulo como losango.

A terceira questão do teste solicitou aos professores que fizessem dois quadrados diferentes, cujo fim foi verificar os parâmetros empregados para promover a diferenciação entre as figuras produzidas.

Do total de 24 docentes participantes do estudo, uma média de 8% não produziu quadrados nessa questão. Parece que esses profissionais apresentam dificuldades em construir um quadrado.

Nesse item, observamos que 46% dos professores construíram dois quadrados de tamanhos diferentes, isto é, esses profissionais consideraram como aspecto de diferenciação o tamanho das figuras. Já Câmara dos Santos (2001a) verificou que um em cada três estudantes estabeleceram a diferenciação entre as duas produções apenas pelo seu tamanho.

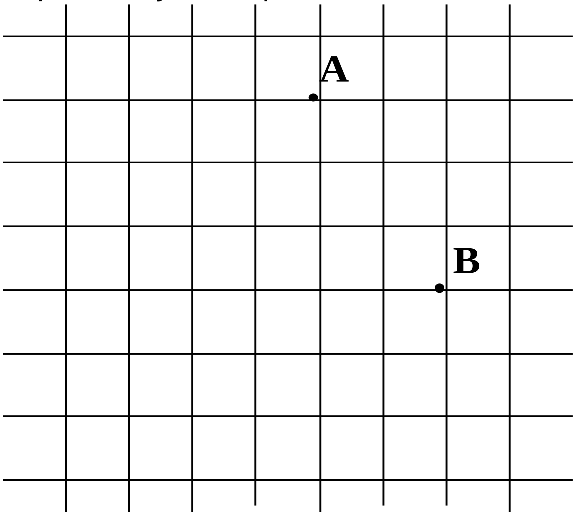
Em seguida, 37% do total produziram um quadrado e um losango. Aqui parece que os professores buscaram características implícitas como caminho de distinção.

Além disso, em média, 8% dos professores de matemática fizeram um quadrado e um trapézio, 4% produziram um paralelogramo (não quadrado) e um retângulo e 4% construíram um paralelogramo (não quadrado) e um trapézio. Esses dados necessitam de um estudo mais refinado, buscando compreender melhor o que levou esses docentes a realizarem essas produções.

A quarta questão pediu que os professores produzissem um losango *ABCD*, por meio de dois vértices dados (*A* e *B*), ilustrados a partir de dois nós fixados em uma malha quadriculada (Figura 02). A intenção do item foi evidenciar as estratégias usadas pelos professores na produção do losango.

As produções dos professores foram classificadas em três categorias, que foram elaboradas por Costa (2016a)[5]: perceptiva, reflexiva e divergente (conforme o Quadro 03).

Figura 02 – Representação dos pontos *A* e B na malha quadriculada



Fonte: Câmara dos Santos (2009)

Quadro 3 - Classificação das produções dos professores conforme Costa (2016a)

CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
Perceptiva	O professor faz referência apenas à aparência global do losango na construção.
Reflexiva	O docente parece aplicar as propriedades do losango na produção, isto é, às suas diagonais.
Divergente	O professor produz outro tipo de quadrilátero notável (ou outra figura geométrica), que diverge do losango.

Fonte: Costa (2016a, p. 206)

[5] Costa (2016a) analisou os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis, fazendo uso do *software* GeoGebra como recurso didático para o avanço do pensamento geométrico, de uma turma do 6º ano do ensino fundamental, de uma escola pública em Recife-PE. Tal estudo consistiu na replicação da pesquisa de Câmara dos Santos (2001a). O primeiro pesquisador observou que a sequência didática promoveu aprendizagens geométricas significativas, diferentemente do segundo, que concluiu que o *software* de Geometria Dinâmica foi determinante para o aprendizado dos estudantes. Em relação ao item analisado (quarta questão do teste), em uma primeira etapa do estudo, Costa (2016a) verificou que 57% dos estudantes se situavam na categoria perspectiva, 37% na reflexiva e nenhum aluno na divergente.

Na Tabela 4, encontramos a frequência dos tipos de produções dos docentes, de acordo com a categorização de Costa (2016a).

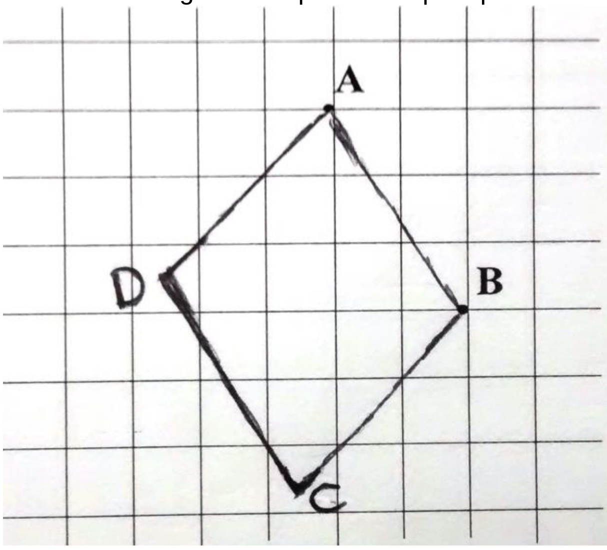
Tabela 4 - Frequência das respostas dos professores em esferas

CATEGORIAS	FREQUÊNCIA
Perceptiva	17%
Reflexiva	75%
Divergente	8%

Fonte: Dados da pesquisa

Pela tabela, observamos que 17% dos docentes investigados se encontravam na classe perceptiva, ou seja, eles fizeram o losango essencialmente por meio de sua aparência física (característica do primeiro nível de Van-Hiele). A Figura 03 ilustra esse caso, com a produção do professor P6.

Figura 03 – Losango *ABCD* produzido pelo professor P06



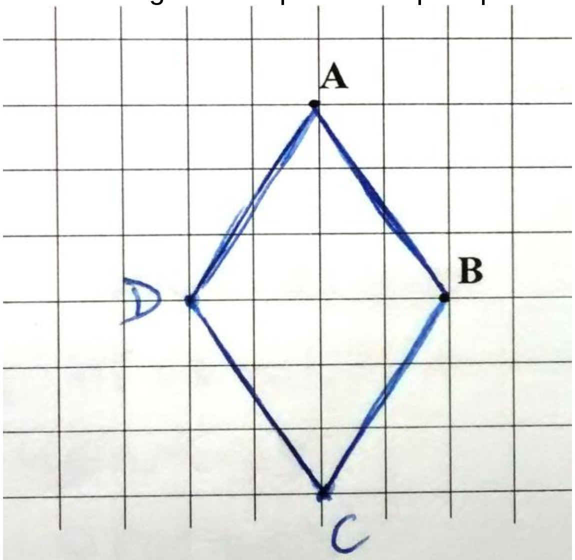
Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da facilidade disponibilizada pela malha quadriculada, P6 parece não ter mobilizado as diagonais do losango na construção, fazendo uso apenas da aparência física desse quadrilátero notável.

Pelos registros dos professores, parece que 75% deles estavam na classe reflexiva, isto é, foram capazes de fazer o losango a partir do uso de suas diagonais (que seria um aspecto do segundo nível de Van-Hiele), mas parece ser um uso mais implícito. O exemplo desse caso está ilustrado na Figura 04, com a produção do docente P18.

Em um primeiro momento da pesquisa, Câmara dos Santos (2001a) notou que menos da metade dos estudantes do 6º ano foi capaz de produzir o losango de modo adequado.

Figura 04 – Losango *ABCD* produzido pelo professor P18



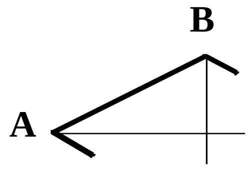
Fonte: Dados da pesquisa

Pelo registro, podemos observar que P18 não apresentou dificuldades em produzir o quadrilátero. Assim, parece que esse docente fez uso das diagonais do losango na construção da figura.

Ainda, 8% dos professores atuaram na classe divergente, pois, ao invés de losango, 4% dos participantes da pesquisa produziram um paralelogramo (não losango) e 4% construíram uma figura com cinco lados (pentágono regular). Aqui, os resultados parecem evidenciar que esses professores têm dificuldades de compreensão em relação ao conceito de losango. Tal fato necessita ser estudado de forma mais profundada em estudos futuros.

A quinta questão disponibilizou um losango *ABCD*, que teve uma porção apagada (Figura 05). Os professores foram perguntados se era possível ou não reconstruir o losango apagado e, em seguida, deveriam explicar suas escolhas. Novamente, interessamo-nos em verificar o que os docentes mobilizavam nas produções.

Figura 05 – Losango *ABCD* que teve um pedaço apagado



Fonte: Câmara dos Santos (2009)

Observamos que 34% dos professores reconstruíram o losango a partir do seu aspecto global, informando que apenas seria preciso estabelecer ligações entre os pontos *A, B, C* e *D*. Dessa forma, eles não mencionaram as diagonais do losango.

Identificamos que uma média de 13% dos docentes mobilizaram a definição do losango na reconstrução da figura, e 37% do total mencionaram as diagonais do quadrilátero notável, enquanto Câmara dos Santos (2001a) evidenciou que apenas 40% dos estudantes do 6º ano se referiam, de algum modo, às diagonais do losango.

Além disso, 4% dos profissionais da educação investigados refizeram o losango a partir de duas propriedades do losango: **os lados opostos apresentam a mesma medida de comprimento e também os ângulos opostos são congruentes**. Ainda, 4% do total afirmaram que reconstruíram o losango por meio da **relação de paralelismo entre os lados da figura, e 4% a partir do cálculo da medida do comprimento de um dos lados e dos ângulos.**

Por fim, 4% dos professores não conseguiram refazer o losango, argumentando que seria necessário **o uso de instrumentos de medida (uma régua).**

5. Considerações finais

Os dados produzidos na pesquisa parecem apresentar que a maioria dos professores participantes do estudo se encontrava no primeiro nível de pensamento geométrico da teoria de Van-Hiele, caracterizado pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir de suas aparências físicas.

Dessa forma, esses profissionais ainda não consideram as propriedades dos quadriláteros notáveis (conceito explorado no trabalho). Tal fato pode ser ilustrado na segunda questão do teste, no qual metade dos professores não reconheceu o quadrado e o retângulo como paralelogramos (não estabelecendo, assim, a inclusão de classe).

Evidenciamos circunstâncias em que os professores apresentaram dificuldades em: reconhecer quadrados no grupo dos retângulos e considerar o quadrado como um tipo especial de losango. Nesse sentido, nos parece contundente que esses profissionais apresentam lacunas conceituais em relação aos quadriláteros notáveis, que é um conceito a ser sistematizado no 6º ano do ensino fundamental, com base nos documentos de orientação curricular vigentes no Brasil, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), os Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental do Estado da Paraíba (PARAÍBA, 2010) e os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012).

Esse fenômeno parece que não ocorre de forma isolada, isto é, não ocorre apenas com professores de matemática, pois, como foi observado em Câmara dos Santos (2001a), Costa e Câmara dos Santos (2015a, 2015b) e Costa (2016a), estudantes de diferentes níveis escolares do ensino básico apresentam dificuldades em realizar a inclusão de classe dos quadriláteros notáveis.

Encontramos um número pequeno de docentes trabalhando no segundo no nível de Van-Hiele, marcado pela consideração das propriedades das figuras geométricas. Ainda identificamos, em pequena quantidade, professores demonstrando encontrar-se no terceiro nível de pensamento geométrico vanhieliano, no qual, ocorre a articulação das propriedades. Segundo a teoria de Van-Hiele (1957), um professor de matemática deveria ser capaz de analisar a geometria de forma dedutiva e abstrata, aspectos do quarto e do quinto nível de sua teoria.

Para tanto, parece que o conhecimento desses professores sobre o conceito de quadriláteros notáveis é bastante frágil, o que pode dificultar o trabalho em sala de aula desses profissionais nos diversos cenários de aprendizagem, quando o saber geométrico estiver em jogo na situação didática.

Referências bibliográficas

ALVES; G. S.; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, n. 5, p. 69-76, 2010.

ATEBE; H. U.; SCHAFER, M. As soon as the four sides are all equal, then the angles must be 90º each: Children's misconceptions in geometry. *African Journal of Research in SMT Education*, v. 12, n. 2, p. 47–66, 2008.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. 3ªed. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Effets de l´utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique. IN: CONGRES INTERNATIONAL CABRI GÉOMÈTRE, 2, Montreal, 2001a. *Annales*... Montreal: Cabri World Committee, 2001, p.1-12.

______________________. Investigando os níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele: o caso dos quadriláteros. IN: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, São Leopoldo, 1998. *Anais...* São Leopoldo: SBEM, 1998, p.1-6.

______________________. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, Rio de Janeiro, 2001b. *Anais...* Rio de Janeiro: SBEM, 2001, p.1-14.

______________________. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Orgs.). *A pesquisa em educação matemática:* repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p.177-211.

COSTA, A. P. *A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental*: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016a.

___________. *A Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico - TDPG:* revisitando os níveis. Tese em desenvolvimento (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016b.

___________.Evoluindo o raciocínio geométrico por meio de uma sequência didática: o caso dos quadriláteros. IN: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 18, 2014, Recife. *Anais...* Recife: EDUMATEC, 2014, p.1-12.

COSTA A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. IN: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2015,TuxtlaGutiérrez. *Anais...* Tuxta Gutiérrez: CIAEM, 2015, p. 1-9.

________________________________. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. IN: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2015, Ilhéus. *Anais...* Ilhéus: PPGEM, 2015, p.1-12.

GAZIRE, E. S. *O não resgate das geometrias*. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2000.

KALEFF, A. M. M. R. *Vendo e entendendo poliedros*. Niterói: EdUFF, 1998.

NASSER, L. O desenvolvimento do raciocínio em geometria. *Boletim GEPEM (USU)*, v. 27, p. 93-99, 1990.

_______________. A Teoria de Van Hiele para o ensino de geometria: pesquisa e aplicação. SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1995, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: SBEM, 1998, p.1-12.

_______________. A construção do pensamento geométrico. IN: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 1998, São Leopoldo. *Anais...* São Leopoldo: SBEM, 1998, p.1-8.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele*. 4ªed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão/IM-UFRJ, 1997.

PARAÍBA. *Avaliando Idepb 2014.* CAEd, v.3, p.1-56, jan-dez 2014.

_________________________. *Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental do Estado da Paraíba*. João Pessoa, SEC/Grafset, 2010.

PAVANELLO, R. M.. A geometria no ensino fundamental. *Teoria e Prática da Educação*, v. 1, n.2, p. 33-41, 1999.

PERNAMBUCO. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:* Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Juiz de Fora: UFJF, 2012.

VAN-HIELE, P. M. *El problema de la comprensión*: en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad Real de Utrecht. Utrecht,1957.