

**Resolução de problemas combinatórios a partir de material manipulativo e de lápis e papel:
intervenções no 5º ano do ensino fundamental**
**Resolution of combinatorial problems from manipulative materials and pencil and paper:
interventions in the 5th grade of elementary school**

Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa¹

cristianepessoa74@gmail.com

Laís Thalita Bezerra dos Santos²

laisthalita@hotmail.com

Resumo

O presente estudo teve como principal objetivo verificar a influência do material manipulativo na compreensão combinatória e comparar o desempenho dos alunos na resolução de problemas combinatórios, com o uso de material manipulativo ou do lápis e papel. Foram pesquisados alunos de duas turmas de 5º ano do ensino fundamental, que resolveram um pré-teste e um pós-teste, intercalados por duas sessões de intervenção, nas quais um dos grupos utilizou fichas como material manipulativo para apoiar as resoluções, e o outro grupo utilizou apenas lápis e papel. Os resultados apontam que o grupo que utilizou apenas o lápis e papel obteve melhores resultados do que o que utilizou o material manipulativo. Independentemente do recurso utilizado, o importante é que os alunos compreendam os invariantes dos problemas combinatórios e utilizem estratégias válidas de resolução, aprimoradas ao longo da aprendizagem.

Palavras-chave: Combinatória, Problemas combinatórios, Resolução de problemas, Material manipulativo, 5º ano do ensino fundamental.

Abstract

The present study aimed to investigate the influence of manipulative material in understanding Combinatory and compare the performance of students in solving combinatorial problems using manipulative material or pencil and paper. Students were surveyed from two classes of 5th grade of elementary school, which solved a pre-test and post-test interspersed by two intervention sessions, in which one of the groups have used records as manipulative materials to support the resolutions, and the other one has used only pencil and paper. The results showed that the group that used only pencil and paper obtained better results than the one that used manipulative material. Regardless of the resource used, the important thing is that the students understand the invariants of combinatorial problems and use valid resolution strategies, which are enhanced along the learning.

Keywords: Combinatory, Combinatorial problems, Troubleshooting, Manipulative materials, 5th grade of elementary school

¹ Professora e pesquisadora da Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec e do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino – Centro de Educação – UFPE

² Mestranda do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec – UFPE.

Introdução

A combinatória é um ramo da matemática que permite que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem que haja necessidade de contá-los um a um. Cada um dos problemas combinatórios é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento, uma vez que é preciso perceber regularidades, controlar as variáveis, não perder de vista nenhum elemento e esgotar todas as possibilidades.

Em relação à necessidade e importância do trabalho com a combinatória desde os primeiros anos da escola básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), orientam, para o 1º e 2º ciclos, “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio fundamental da contagem” (p. 57), e para o 3º e 4º ciclos, em relação aos problemas de contagem, “o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a aplicação no cálculo de probabilidades” (BRASIL, 1998, p. 52).

Embora os livros didáticos destinados aos anos iniciais do ensino fundamental já tragam diversificados problemas de raciocínio combinatório (como evidenciado por Barreto, Amaral e Borba, 2007), os mesmos não fazem uma distinção desses tipos nem alertam o professor para o trabalho com esse tema, ou seja, não há um trabalho sistemático com o raciocínio combinatório antes do 2º ano do ensino médio.

Estudos que investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório com pessoas de diferentes faixas etárias (SCHILIEMANN, 1988; PESSOA; BORBA, 2009; 2010; PESSOA; SANTOS, 2011; LIMA; BORBA, 2009; MATIAS, SANTOS; PESSOA, 2011) apresentam, como um dos resultados, dificuldades em resolver problemas combinatórios antes que haja um trabalho com esse tipo de raciocínio. Entretanto, apresentam também interessantes formas de pensar sobre a combinatória, como as estratégias usadas por alunos de diferentes anos escolares e as conceitualizações por eles evidenciadas, mostrando que é possível desenvolver um interessante trabalho visando ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A partir de resultados dos estudos anteriores, outras pesquisas foram desenvolvidas, visando a investigar possibilidades de intervenção sobre a combinatória, utilizando-se de diferentes recursos como, por exemplo, o *software* Árbol, a partir do

qual se ensina problemas combinatórios, utilizando-se da árvore de possibilidades como estratégia (AZEVEDO; COSTA; BORBA, 2011; AZEVEDO; BORBA, 2013); utilizando a árvore de possibilidades e a listagem como estratégias de ensino da combinatória para alunos da Educação de Jovens e Adultos (BARRETO; BORBA, 2011); utilizando a listagem de possibilidades; a explicitação dos invariantes da combinatória; a sistematização da estratégia de resolução; e a generalização como um caminho possível para o ensino de combinatória (referência excluída para assegurar PESSOA; SANTOS, 2012; PESSOA; SILVA, 2012).

Assim, na perspectiva de possibilidades de intervenções em sala de aula para o ensino e a aprendizagem da combinatória, o presente estudo tem por objetivos identificar as possíveis contribuições das intervenções para o entendimento da combinatória pelos alunos pesquisados, verificando-se a influência, ou não, do material manipulativo na compreensão combinatória; analisar o desempenho dos alunos, em relação à combinatória, entre o pré-teste e o pós-teste de ambos os grupos; e comparar o desempenho de alunos do 5º ano do ensino fundamental ao resolverem problemas combinatórios a partir do uso de material manipulativo e do uso de lápis e papel.

A combinatória

De acordo com Pessoa e Borba (2009), a combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um.

A seguir, estão colocados os significados presentes na combinatória (tipos de problemas), com seus exemplos e **invariantes** (relações e propriedades que se mantêm constantes):

Produto cartesiano – Invariante: dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto.

Exemplo: Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Permutação – Invariantes: todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Exemplo: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

Arranjo – Invariantes: tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Exemplo: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Combinação – Invariantes: tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais; a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Exemplo: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Como cada um só pode receber uma bicicleta, quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

O uso do material manipulativo no ensino-aprendizagem

De acordo com Matos e Serrazina (1996), materiais manipuláveis são objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais, que têm aplicação no dia a dia, ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia.

Segundo os PCNs de matemática (BRASIL, 1997), em relação ao uso dos recursos didáticos, os materiais têm papel importante no processo de ensino aprendizagem de matemática, desde que sejam inseridos em situações didáticas que provoquem a análise e reflexão, ou seja, não basta entregar o material ao aluno, para que ele tenha um papel desencadeador na aprendizagem. É necessário que o material tenha algum sentido para o aluno e que seja trabalhado para fins didático-pedagógicos. Nessa mesma direção, está o argumento de Schlieman (1992), que defende que não é especificamente o uso do material concreto, mas, sim, as ações da criança e do professor e a reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático. De acordo

com Brito e Bellemain (2008), nem sempre o material torna a situação didática mais significativa.

Assim, em relação à dimensão pedagógica dos materiais concretos, pode-se perceber que é a situação em que o material está inserido que vai definir se assume ou não o caráter de material pedagógico. Aqui, considera-se como material manipulativo tanto o que pode ser palpável, quanto o que pode ter um sentido para a criança, ou seja, em um mesmo material (as fichas com desenhos referentes aos objetos tratados nas situações-problema apresentadas), considera-se a atribuição de sentido e o que é palpável.

Metodologia

O estudo foi desenvolvido em uma escola da região metropolitana de Recife, que possui duas turmas do 5º ano, de modo que foram formados dois grupos, um para trabalhar com material manipulativo (Grupo de Material Manipulativo - GMM) e outro para trabalhar com lápis e papel (Grupo Lápis e Papel - GLP).

Com o objetivo de comparar o desempenho de alunos do 5º ano do ensino fundamental, ao resolverem problemas combinatórios a partir da utilização de material manipulativo e de apenas lápis e papel, fomos à escola com a proposta de trabalhar problemas combinatórios de duas maneiras: um grupo, fazendo uso de lápis e papel (GLP); e o outro, usando fichas com imagens representando os elementos dos enunciados dos problemas (GMM), de modo que fosse possível a manipulação.

Em ambos os grupos, os quatro tipos de problemas combinatórios foram discutidos em dois momentos de intervenção. Na primeira sessão de intervenção, os quatro problemas trabalhados levavam a resultados com um número menor de possibilidades, cuja grandeza numérica não excedia dez. Já na segunda sessão de intervenção, os problemas trabalhados resultavam em um número maior de possibilidades, com grandeza numérica até 30.

Tanto no GMM como no GLP, houve destaque para três pilares considerados fundamentais para a compreensão da combinatória: os **invariantes** específicos de cada um dos significados combinatórios, a **sistematização da estratégia** (listagem para o GLP e organização das fichas para o GMM) e a **percepção de regularidade/generalização**. O primeiro pilar está relacionado às propriedades específicas de cada um dos significados combinatórios (produto

cartesiano, arranjo, combinação e permutação); o segundo pilar, à forma organizada de resolver os problemas, esgotando as possibilidades envolvendo um dos elementos, por exemplo, para depois criar possibilidades com o segundo elemento. Tal procedimento de resolução auxilia os alunos a melhor controlar os elementos, sabendo quais possibilidades já foram listadas e também quais faltam para concluir corretamente o problema. Por último, a **percepção de regularidade/generalização** se refere à descoberta do total de possibilidades para o problema, sem ter que listá-las uma a uma, o que facilita a resolução. Na **percepção de regularidade/generalização**, ao esgotar as possibilidades para um dos elementos do problema, é possível fazer um cálculo que permita chegar ao resultado final correto, sem a necessidade de listar as demais possibilidades. O destaque para os pilares citados foi utilizado em um estudo (PESSOA; SANTOS, 2012), no qual as autoras trabalharam a resolução de problemas combinatórios com lápis e papel, com a listagem das possibilidades, sendo esse outro pilar considerado importante e facilitador da compreensão combinatória.

No estudo atual, a diferença entre os dois grupos investigados (GMM e GLP) foi a disponibilização, ou não, de materiais manipulativos (imagens representando os elementos presentes nos enunciados dos problemas), buscando-se verificar a possível influência do material na compreensão combinatória.

Na primeira sessão de intervenção com o GMM, as imagens foram levadas em envelopes separados para cada um dos alunos, em quantidade superior à necessária para a resolução, na tentativa de não determinar ou indicar para os alunos os procedimentos de resolução e a quantidade de elementos a ser utilizada. Foi feita a leitura de cada um dos problemas com os alunos e a inicial discussão sobre os invariantes, ou seja, sobre as propriedades específicas de cada um deles. Após a discussão inicial, foi solicitado aos alunos que respondessem os problemas, a partir da colagem das imagens que tinham em mãos, o que permitiu saber como eles estavam compreendendo os invariantes dos problemas e a utilização da sistematização, dentre outros. Concluída a resolução de cada um dos problemas, foi feita a discussão e resolução no quadro, pela pesquisadora.

Na segunda sessão de intervenção, na qual os problemas trabalhados levavam a resultados com um número maior de possibilidades (até 30), foi entregue aos alunos quantidade de material manipulativo menor do que a

necessária para a formação de todas as possibilidades do problema. O objetivo era o de trabalhar a generalização, sendo disponibilizado material suficiente para o esgotamento das possibilidades apenas para um dos elementos do problema. A pesquisadora explicou aos alunos que poderia “faltar material” para a resolução, havendo a necessidade de encontrar algum procedimento para chegar ao resultado final correto, mesmo sem a disponibilidade de materiais. Desse modo, buscou-se que os alunos refletissem mais uma vez sobre a **generalização/percepção da regularidade**, percebendo a sua importância na resolução dos problemas. Depois de os alunos construírem as possibilidades com o material disponível, a pesquisadora, no quadro, verificou junto com eles, se ainda havia alguma possível formação com o elemento que se objetivava esgotar. Ao perceber que não faltava nenhuma, foi feita a multiplicação, chegando ao número total de possibilidades que respondia o problema, sendo tal procedimento repetido durante a resolução dos quatro problemas combinatórios que levavam a um número maior de possibilidades.

No GLP, no que se refere ao enfoque nos invariantes, à sistematização e à generalização, o procedimento adotado durante as resoluções foi o mesmo que o descrito acima, porém, o único material que os alunos tinham disponível para a resolução dos problemas era o lápis e o papel.

Resultados e discussão

Análise dos acertos totais apresentados pelos alunos

Em princípio, foi feito o levantamento acerca dos acertos totais³ dos alunos, tanto no pré-teste como no pós-teste dos grupos com material manipulativo (GMM) e com lápis e papel (GLP), para, adiante, refinar tais resultados e analisar mais detalhadamente as formas de resoluções encontradas, percebendo possíveis avanços, não só na quantidade de acertos, mas também na qualidade das respostas e no nível de compreensão acerca dos problemas combinatórios.

A seguir, apresentam-se os Quadros 1 e 2, que contêm os acertos totais dos alunos no pré-teste e no pós-teste do GMM, de modo que seja possível perceber os avanços advindos com os momentos de intervenção.

³ São considerados acertos totais aqueles em que os alunos chegaram à resposta correta. Além dos acertos totais, existem os acertos parciais, nos quais os alunos desenvolvem a resolução a partir de uma estratégia válida, mostrando que entenderam o que o problema solicita, mas não conseguem esgotar todas as possibilidades e/ou não conseguem chegar à resposta correta.

Quadro 1: Acertos Totais por aluno do Grupo de Material Manipulativo no Pré-teste

Alunos	Problemas								Total de Acertos
	PC- ⁴	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+	
Aluno 1	X								1
Aluno 2									0
Aluno 3									0
Aluno 4									0
Aluno 5									0
Aluno 6									0
Aluno 7									0
Aluno 8									0
Aluno 9									0
Aluno 10									0

Quadro 2: Acertos Totais por aluno do Grupo de Material Manipulativo no Pós-teste

Alunos	Problemas								Total de Acertos
	PC-	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+	
Aluno 1	X								1
Aluno 2									0
Aluno 3									0
Aluno 4									0
Aluno 5	X	X	X				X		4
Aluno 6									0
Aluno 7									0
Aluno 8									0
Aluno 9		X							1
Aluno 10	X	X							2

No GMM, a partir dos dados acima apresentados (Quadros 1 e 2), percebe-se a baixa quantidade de acertos totais no pré-teste, havendo apenas um aluno que apresenta um acerto total no problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades.

É possível perceber que, assim como em estudo anterior, (PESSOA; SANTOS, 2012), os alunos estudados, anteriormente às intervenções, não apresentavam uma compreensão mais elaborada acerca da combinatória, no que se refere aos acertos totais.

No Quadro 2, a partir dos resultados apresentados após as intervenções, percebe-se um aumento na quantidade de acertos totais, se em comparação com o pré-teste, mas um resultado menor do que o esperado. O Aluno 5 aumentou de

⁴ PC- = Produto Cartesiano com número menor de possibilidades; PC+ = Produto Cartesiano com número maior de possibilidades; Arr- = Arranjo com número menor de possibilidades; Arr+ = Arranjo com número maior de possibilidades; Comb- = Combinação com número menor de possibilidades; Comb+ = Combinação com número maior de possibilidades; Per- = Permutação com número menor de possibilidades; Perm+ = Permutação com número maior de possibilidades.

zero para quatro acertos; e o Aluno 10 aumentou de zero para dois acertos. Os demais alunos continuaram com a mesma quantidade de acertos totais apresentada no pré-teste.

Assim, apesar de os alunos terem avançado, se em comparação com o pré-teste, não houve um aumento significativo de acertos totais após as intervenções com material manipulativo. Apesar disso, é possível que os alunos tenham avançado em termos da qualidade das respostas apresentadas, ainda que sem o esgotamento das possibilidades, o que será verificado adiante, quando houver uma análise de forma mais aprofundada.

A seguir, a partir dos acertos totais no pré-teste e no pós-teste dos alunos participantes do GLP (Quadros 3 e 4), é possível verificar os avanços desse grupo e verificar a compreensão combinatória, a partir da discussão com lápis e papel.

Quadro 3: Acertos Totais por aluno do Grupo Lápis e Papel no Pré-teste

Alunos	Problemas								Total de Acertos
	PC- ^o	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+	
Aluno 1									0
Aluno 2									0
Aluno 3									0
Aluno 4									0
Aluno 5									0
Aluno 6									0
Aluno 7	X							X	2
Aluno 8									0
Aluno 9		X							1

Quadro 4: Acertos Totais por aluno do Grupo Lápis e Papel no Pós-teste

Alunos	Problemas								Total de Acertos
	PC-	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+	
Aluno 1	X	X	X						3
Aluno 2	X	X	X						3
Aluno 3	X	X	X						3
Aluno 4		X	X						2
Aluno 5	X		X				X		3
Aluno 6									0
Aluno 7	X	X	X	X	X		X		6
Aluno 8	X				X				2
Aluno 9	X								1

A partir dos dados apresentados (Quadros 3 e 4), percebe-se que houve avanços em relação aos acertos totais dos alunos entre o pré-teste e o pós-teste do GLP. Anteriormente às intervenções, apenas dois alunos apresentavam acertos totais, sendo eles o Aluno 7, que apresentava acertos totais no problema de produto cartesiano, com número menor de possibilidades e no de permutação com número maior de possibilidades, e o Aluno 9, que apresentava acertos totais no problema de produto cartesiano com número maior de possibilidades. Já no pós-teste, percebe-se que todos os alunos apresentaram avanços na compreensão combinatória, no que se refere aos acertos totais. Como exceção, destaca-se o Aluno 9, que permaneceu com um acerto total após as intervenções.

Percebe-se ainda que há uma maior concentração de acertos totais em significados combinatórios que levam a respostas com um número menor de possibilidades, resultado que ratifica o encontrado por (PESSOA; SANTOS, 2012). Essas autoras dizem que é mais difícil generalizar/esgotar as possibilidades com problemas menos comuns e que possuem um número maior de elementos a serem combinados.

É importante também destacar que nesse grupo (GLP), o problema de produto cartesiano com número maior de possibilidades apresentou importantes avanços, diferentemente dos demais problemas que levavam a respostas com um número maior de possibilidades. Hipótese para tal avanço é a de que esse tipo de problema é resolvido através de uma multiplicação direta, o que pode facilitar a resolução.

Assim, quando comparados os resultados entre o GMM e o GLP, no que se refere aos acertos totais, percebe-se que o GLP apresentou mais avanços do que o GMM. Hipótese para tal resultado pode ser encontrada em um possível desvio de foco da explicação (e do destaque para os **invariantes**, para a **sistematização** e para a **generalização/percepção da regularidade**) para a preocupação com a colagem dos materiais, o que pode ter influenciado nos resultados apresentados.

Estudos anteriores, como o de Selva (1998), que investigou o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão dos tipos partição e cotição com 108 crianças (divididas entre a alfabetização, a primeira e a segunda séries de uma escola particular de Recife), não percebeu avanços significativos, quando comparados os acertos do grupo que trabalhou com fichas (material

manipulativo) e do grupo que trabalhou com lápis e papel, apresentando ambos os grupos valores aproximados de acertos.

No estudo atual, percebe-se que o material manipulativo, com os alunos pesquisados (GMM), parece não ter auxiliado na compreensão da combinatória em termos de acertos totais dos problemas, fazendo com que os alunos desse grupo apresentassem avanços inferiores, se em comparação com os alunos que trabalharam com lápis e papel (GLP).

A seguir será feita a análise, de forma mais detalhada, sobre como se deram os avanços no que se refere ao pré-teste e ao pós-teste, tendo em vista que, como citado anteriormente, muitos alunos, ainda que não tenham chegado ao esgotamento das possibilidades, podem ter passado e avançado diversos níveis relativos ao entendimento da combinatória.

Análise dos tipos de respostas apresentadas pelos alunos

Como afirmado durante a análise direcionada para os acertos totais, para a análise quantitativa, foram considerados como acertos apenas os acertos totais, porém, entre acertos e erros, há um enorme espectro de possibilidades, de estratégias e tipos de respostas, que fazem com que se reflita sobre como os alunos pensam em relação à combinatória. Desse modo, a seguir é feita uma abordagem de cunho mais qualitativo, de modo a verificar, além da quantidade de acertos, em quais aspectos, no âmbito de tipos de respostas, os alunos apresentaram avanços após as intervenções.

Os tipos de respostas dos alunos em relação aos problemas propostos estão apresentados no Quadro 5, discutido adiante.

Quadro 5. Tipos de respostas apresentadas pelos alunos investigados ao resolverem os problemas de combinatória propostos

1. Em branco	Não se sabe, nesses casos, se o aluno não respondeu porque não sabia, porque não se interessou, porque não quis fazer ou se considerou o problema de difícil resolução.
2. Apenas resposta incorreta	O aluno deu apenas a resposta errada para o problema proposto.
3. Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta	Incompreensão do problema – o aluno apresentou uma resposta incorreta, e na sua resolução não há indícios de relação com a questão proposta. Tal percepção é possível, a partir da estratégia pelo aluno apresentada.
4. Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	Apresenta certa compreensão do problema – o aluno errou a resposta ou não conseguiu completá-la, entretanto, sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema, entretanto, não organizou sistematicamente a estratégia, listando, desenhando, fazendo árvore de possibilidades, quadros, diagramas ou outra estratégia de maneira não sistemática, sem controlar de alguma forma os elementos, não conseguindo esgotar todas as possibilidades.
5. Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	Nesta categoria o aluno também apresentou certa compreensão do problema, entretanto, apesar de utilizar uma estratégia mais organizada, mais sistemática, errou a resposta ou não conseguiu chegar ao final da resolução. Sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema, entretanto, na maioria das vezes, neste caso, o aluno não conseguiu esgotar todas as possibilidades para o tipo de problema proposto.
6. Apenas resposta correta	O aluno deu apenas a resposta certa para o problema proposto.
7. Resposta correta com explicitação de estratégia	O aluno conseguiu compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta, utilizando e explicitando uma estratégia válida e encontrando formas de esgotar todas as possibilidades.

Estando explicitadas as categorias utilizadas para sistematizar as respostas dos alunos pesquisados, apresenta-se a Tabela 1, a seguir, que sistematiza e analisa os tipos de respostas utilizados pelos alunos por tipo de problema e por ordem de grandeza, no pré-teste do GMM.

Tabela 1: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pré-teste pelo GMM

			Em Branco	Apenas resposta incorreta	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática	Resposta correta com explicitação de estratégia
Problemas	PC	NP		50	30	10	10
		NG		50	40	10	
	Ar	NP	10	30	20	40	
		NG	10	30	50	10	
	Comb	NP	10	40	40	10	
		NG	30	60	10		
	Perm	NP		40	50	10	
		NG	30	30	20	20	

Obs.1: PC= produto cartesiano; Perm. = permutação; Ar = arranjo; Comb. = combinação.

Obs. 2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

A seguir, na Tabela 2, apresenta-se, de forma sistematizada, a análise por tipo de resposta, no pós-teste do GMM, de modo que seja possível comparar os avanços e verificar a influência das intervenções na compreensão combinatória dos alunos pesquisados.

Tabela 2: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pós-teste pelo GMM

		Em Branco	Apenas resposta incorreta	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática	Resposta correta (explicitando estratégia)
Problemas	PC	NP		40	20	10	30
		NG	10	40		20	30
	Ar	NP		40	20	30	10
		NG	20	20	30	20	10
	Comb	NP	10	20	20	30	20
		NG	20	40	10	20	10
	Perm	NP	10	10	10	50	10
		NG	20	20	10	50	

Obs.1: PC= produto cartesiano; Perm. = permutação; Ar = arranjo; Comb. = combinação.

Obs.2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

A partir dos dados sistematizados anteriormente, se comparados o pré-teste e pós-teste do GMM, pode-se perceber uma diminuição no percentual de alunos que respondeu os problemas com respostas referentes à categoria “Apenas resposta incorreta”.

Além disso, é possível perceber um aumento percentual, se comparada a categoria “Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática” entre o pré-teste e o pós-teste. Em problemas do tipo produto cartesiano e arranjo com um número maior de possibilidades, esse percentual aumentou pouco (10% para 20%), possivelmente porque é mais difícil para os alunos resolverem problemas com grandeza numérica maior. Já no problema de permutação, nessa mesma categoria - “Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática” - os percentuais aumentaram de 10% para 50% no problema que levava a um número menor de possibilidades, e de 20% para 50%, nos problemas que envolviam um número maior de possibilidades.

Houve também, no pós-teste, ainda que menor do que o esperado, um aumento de respostas na categoria “Resposta correta (explicitando estratégia)”.

Adiante, serão discutidos exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos no GMM, sendo possível comparar e discutir os tipos de resolução e as estratégias por eles apresentadas no referido grupo.

Abaixo, é apresentada a resolução da Aluna 8, M.F.C.O., para o problema de produto cartesiano com um número menor de possibilidades, no pré-teste.

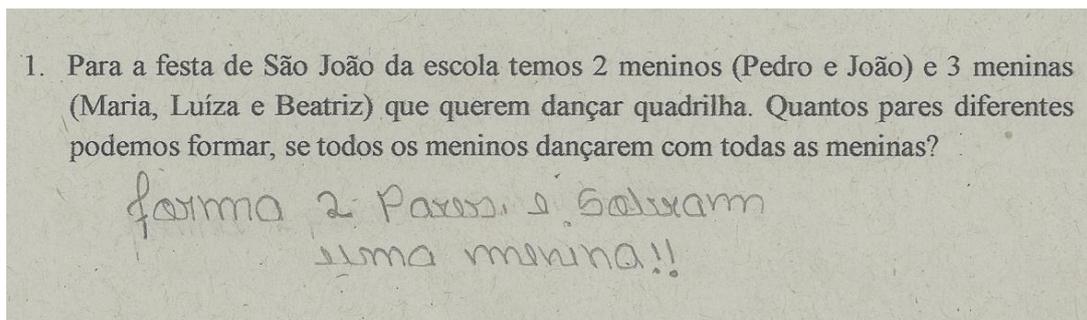


Figura 1: Resolução do problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades pela Aluna 8, M.F.C.O. do GMM, no pré-teste

Ela apresenta uma resposta que se enquadra na categoria “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”, uma vez que, ao responder explicitando o entendimento de que sobraria uma menina, permite a percepção de que está estabelecendo uma relação um a um, na qual um dos elementos fornecidos pelo problema não pode combinar-se com mais de um elemento do outro grupo.

Na Figura 2, a seguir, é possível visualizar a resolução do mesmo tipo de problema (produto cartesiano com número menor de possibilidades) pela Aluna 8, M.F.C.O.

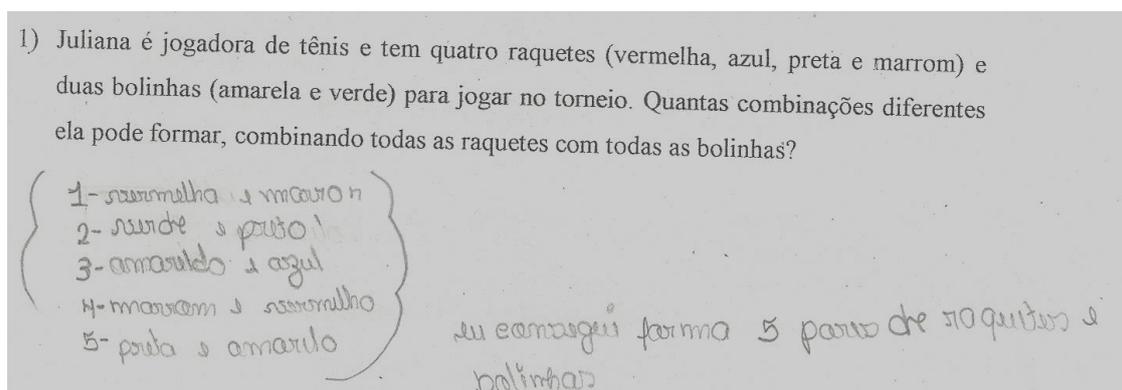


Figura 2: Resolução do problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades pela Aluna 8, M.F.C.O. do GMM, no pós-teste

No pós-teste, a aluna forneceu uma resposta que se enquadra também na categoria “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”, uma vez que, ao resolver o problema, parece não compreender a necessidade de relacionar uma cor de raquete com uma cor de bolinha, contexto do problema. A aluna formou uma dupla com duas cores de raquete (vermelha e marrom) e, julgando ser outra possibilidade, acrescentou “marrom e vermelho”. Durante a listagem das demais possibilidades, a aluna fez a relação correta para o problema, associando uma cor de raquete a uma cor de bolinha.

Resoluções como a apresentada pela Aluna 8, M.F.C.O., no problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades, no pré-teste e pós-teste (Figuras 1 e 2, respectivamente), permitem a reflexão sobre a existência de determinados níveis dentro de uma mesma categoria de tipo de resposta, uma vez que, no pré-teste, por exemplo, a Aluna 8 deixava explícita a relação um a um (“sobra uma menina”), enquanto no pós-teste, apesar de duas possibilidades não serem listadas da forma correta, há a aparente percepção acerca da diversidade de possibilidades existentes para resolver o problema, ainda que sem a conclusão com êxito. Desse modo, é importante destacar que mesmo que a Aluna 8 se encontre, após o pós-teste, na mesma categoria em que foi inicialmente classificada, a mesma avançou na qualidade da sua resposta, demonstrando um avanço na compreensão combinatória. Para exemplificar, a aluna associou a cor de bolinha “amarela” a duas cores de raquete (preto e azul), o que permite inferir que ela já está passando a refletir sobre a relação um a muitos.

Adiante, são apresentadas as resoluções da Aluna 5, G.H.P., para o problema de combinação com número menor de possibilidades no pré-teste e pós-teste.

3. Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Lais, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?

Figura 3: Resolução do problema de combinação com número menor de possibilidades pela Aluna 5, G.H.P. do GMM, no pré-teste

Como possível visualizar na Figura 3, no pré-teste, a Aluna 5 deixa o problema em branco. Já no pós-teste, adiante (Figura 4), essa mesma aluna lista 11 possibilidades e escreve esse algarismo (11). Tratando-se de um problema de combinação com 10 combinações possíveis e analisando a resposta apresentada pela aluna, percebe-se que ela, representando cada fruta (contexto do problema) com a sua inicial, lista as possibilidades de forma sistemática, porém, talvez por dispersão, talvez por dificuldades na compreensão dos invariantes, processo ainda em construção, lista duas vezes a possibilidade “laranja e pera”, ora representada por “LP”, ora representada por “PL”.

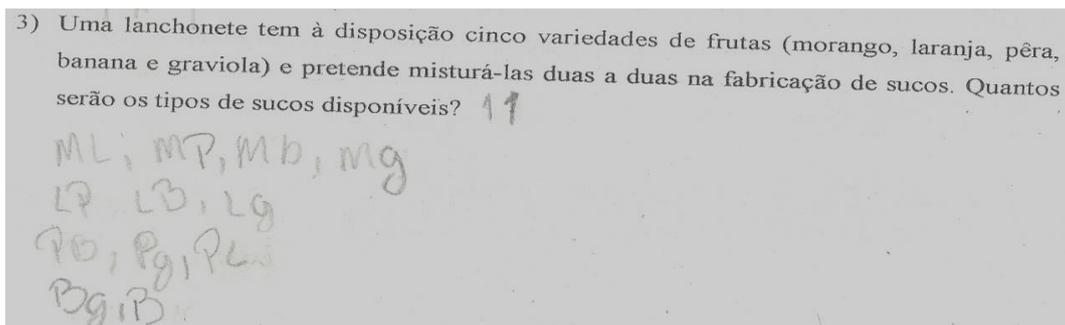


Figura 4: Resolução do problema de combinação com número menor de possibilidades pela Aluna 5, G.H.P. do GMM, no pós-teste

A Aluna 5, G.H.P., a partir da resposta apresentada, enquadra-se na categoria “Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática”. Ela extrapola as possibilidades possíveis para o problema e apresenta, se em comparação com o pré-teste, um importante avanço na compreensão combinatória, uma vez que já consegue listar várias possibilidades válidas para o problema proposto, utilizando também a **sistematização**, um dos pilares trabalhados.

Adiante, apresenta-se a resolução do Aluno 7, J.L.S., no pré-teste, para o problema de permutação com número maior de possibilidades.

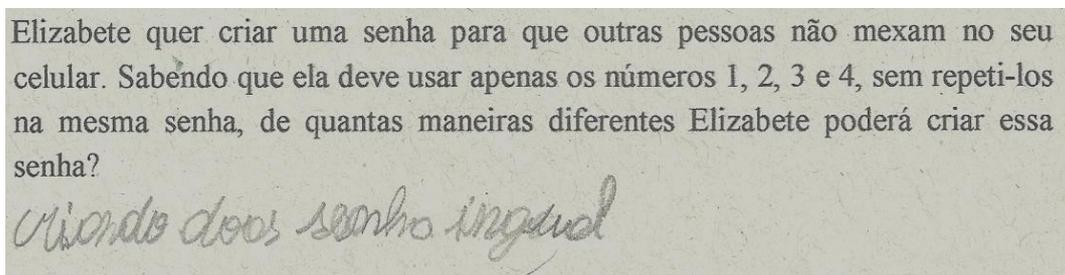


Figura 5: Resolução do problema de permutação com número maior de possibilidades pelo Aluno 7, J.L.S. do GMM, no pré-teste

No pré-teste (Figura 5, acima), o aluno responde com “criando duas senhas iguais”, sendo categorizado em “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”.

Já no pós-teste, a seguir, ele, apesar de não esgotar as possibilidades para solução do problema, lista seis válidas para resolver o problema.

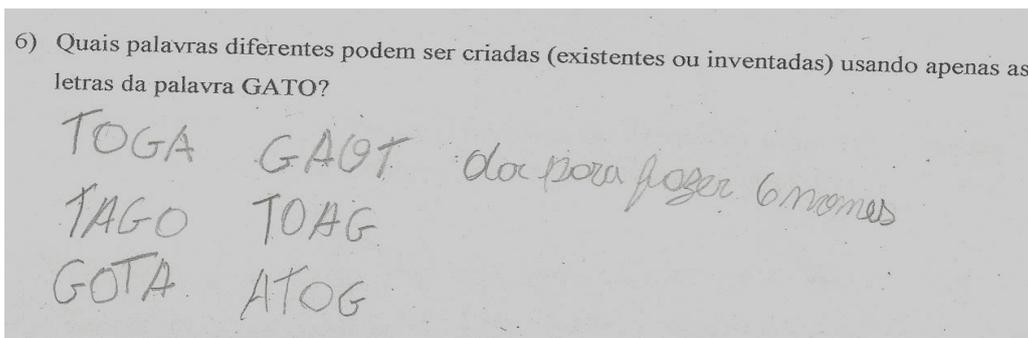


Figura 6: Resolução do problema de permutação com número maior de possibilidades pelo Aluno 7, J.L.S. do GMM, no pós-teste

A partir da resolução acima, o Aluno 7, J.L.S., apresenta uma resposta que se enquadra na categoria “Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática”, sendo perceptível um importante avanço, se em comparação com a resolução apresentada no pré-teste.

A seguir, na Figura 7, é possível visualizar a resolução da Aluna 9, S.S.B., para o problema de arranjo com um número menor de possibilidades.

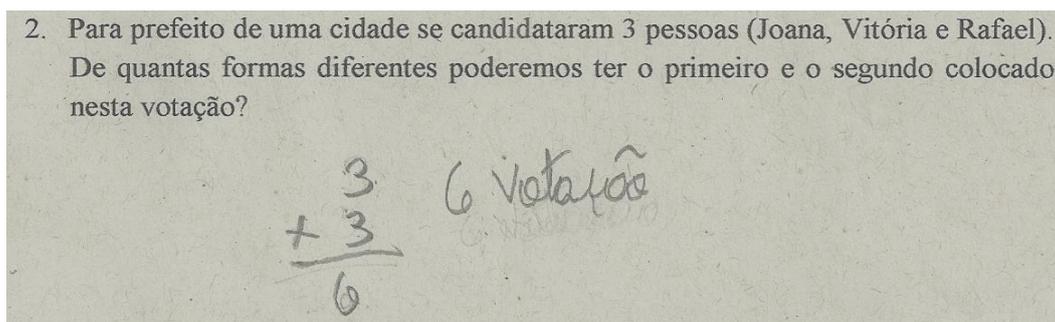


Figura 7: Resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades pela Aluna 9, S.S.B., do GMM, no pré-teste

A aluna, apesar de apresentar a resposta “6”, sendo essa a correta para o problema, encontra tal valor através de uma operação inadequada para o problema proposto, sendo enquadrada na categoria “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”. O valor encontrado como resposta ocorreu coincidentemente, não sendo a adição realizada pela aluna uma forma eficaz de encontrar a solução para o problema.

Na Figura 8, a seguir, é apresentada a resolução da aluna para o problema de arranjo com número menor de possibilidades no pós-teste.

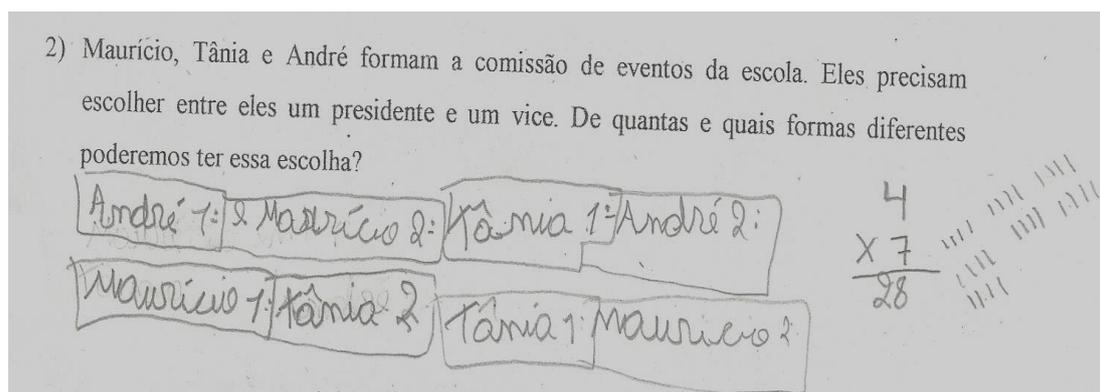


Figura 8: Resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades pela Aluna 9, S.S.B., do GMM, no pós-teste

A aluna lista quatro possibilidades válidas para o problema proposto (“André e Maurício”, “Tânia e André”, “Maurício e Tânia” e “Tânia e Maurício”), que seria esgotado com a listagem de seis possibilidades (faltaram “André e Tânia” e “Maurício e André”). Além disso, após a listagem, a aluna efetua a multiplicação “4 x 7”, que se acredita ser a tentativa de uma generalização, ainda que de forma inadequada para o problema proposto. A resposta da aluna, no pós-teste, enquadrou-se na categoria “Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática”.

A partir das resoluções apresentadas, é possível observar importantes avanços, se comparado o pré-teste e o pós-teste dos alunos. Destaca-se que, como discutido anteriormente, avanços ocorrem ainda que não haja o esgotamento correto e completo das possibilidades, tendo em vista que a compreensão combinatória ocorre paulatinamente, requerendo tempo e trabalho com os invariantes, de modo que seja possível a apropriação.

É importante ressaltar ainda que, apesar dos avanços apresentados, o trabalho com material manipulativo, com esse grupo, não apresentou tantos avanços quanto esperado, se em comparação com o grupo que trabalhou com lápis e papel (GLP), cujos tipos de respostas serão discutidos adiante.

Nas Tabelas 3 e 4, a seguir, apresentam-se, de forma sistematizada, respectivamente, as análises por tipo de resposta no pré-teste e pós-teste do GLP, de modo que seja possível comparar os avanços e verificar a influência das intervenções na compreensão combinatória dos alunos pesquisados através desse modo de intervenção (lápis e papel).

Tabela 3: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pré-teste pelo GLP

			Em Branco	Apenas resposta incorreta	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática	Resposta correta com explicitação de estratégia
Problemas	PC	NP	22	44,5	22			11
		NG	44,5	11	22			22
	Ar	NP	55,5	33	11			
		NG	77,5	11		11		
	Comb	NP	44,5	22	33			
		NG	44,5	22		22	11	
	Perm	NP	33	22		44,5		
		NG	33	22		33		11

Obs.1: PC= produto cartesiano; Perm. = permutação; Ar = arranjo; Comb. = combinação.

Obs.2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

Tabela 4: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pós-teste pelo GLP

			Em Branco	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática	Resposta correta com explicitação de estratégia
Problemas	PC	NP	11			11	7
		NG	33	11			55,5
	Ar	NP	22	11			66,5
		NG	33	33	11	22	
	Comb	NP	11	33	22	22	11
		NG	33	22		44,5	
	Perm	NP	22	22	44,5		11
		NG	55,5		44,5		

Obs.1: PC= produto cartesiano; Perm. = permutação; Ar = arranjo; Comb. = combinação.

Obs.2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

A partir dos dados acima, comparando pré-teste e pós-teste, pode-se perceber, de modo geral, uma diminuição no percentual de respostas concentradas na categoria “Em branco”, se comparados o pré-teste e o pós-teste, o que indica que os alunos passaram, em maior quantidade, a tentar resolver os problemas, iniciando a resolução dos mesmos. Além disso, percebe-se que, diferentemente do pré-teste, após as intervenções, não houve nenhum tipo de resposta na categoria “Apenas resposta incorreta”, o que indica que os alunos, além de iniciar a resolução dos problemas, o fizeram com explicitação de estratégia (na categoria “Apenas resposta incorreta”, os alunos não explicitavam a estratégia utilizada para a resolução). Houve também um aumento na categoria “Resposta correta com explicitação de estratégia”, o que permite inferir que aqueles alunos que responderam os problemas corretamente, o fizeram com explicitação de estratégia.

Adiante, apresenta-se a resolução da Aluna 2, A.A.D., para o problema de produto cartesiano com número maior de possibilidades, no pré-teste e pós-teste do

GLP, de modo a analisar os tipos de resposta apresentados e verificar os possíveis avanços advindos com os momentos de intervenção.

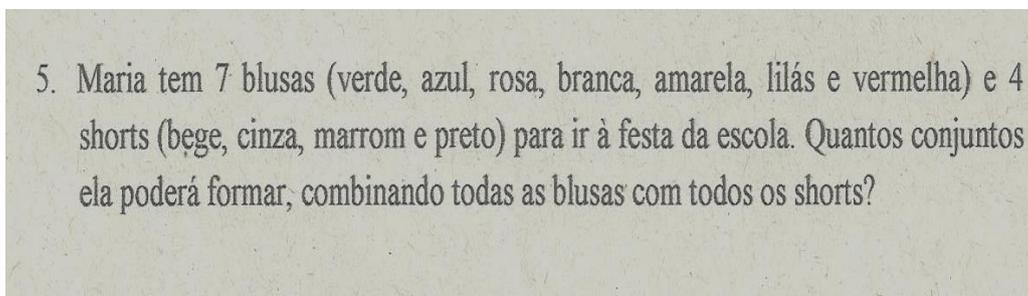


Figura 9: Resolução do problema de produto cartesiano com número maior de possibilidades pela Aluna 2, A.A.D., do GLP, no pré-teste

No pré-teste, pode-se observar (Figura 9) que a Aluna deixa o problema em branco. Já no pós-teste (Figura 10), adiante, percebe-se a listagem das possibilidades de forma sistemática, além da generalização das possibilidades, chegando-se ao resultado final com êxito.

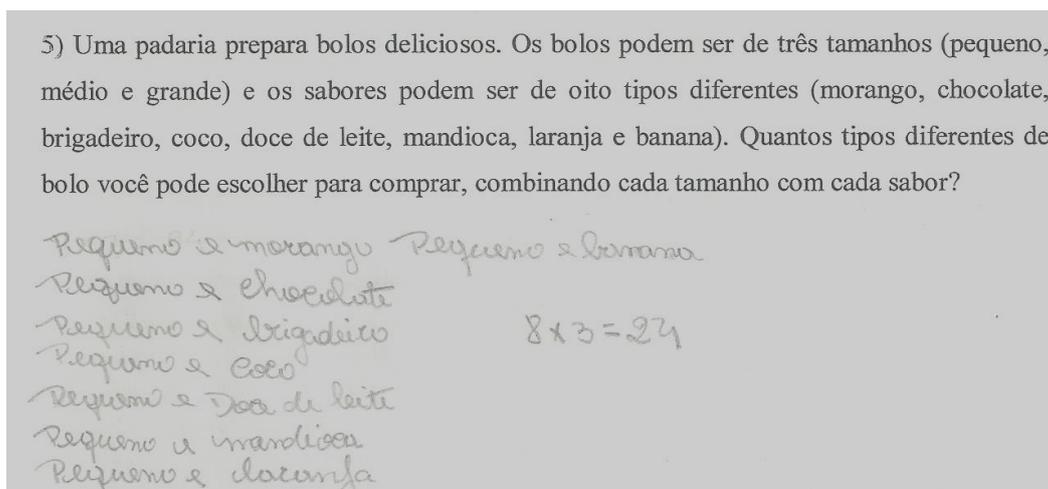


Figura 10: Resolução do problema de produto cartesiano com número maior de possibilidades pela Aluna 2, A.A.D., do GLP, no pós-teste

A resolução inicial categorizada como “Em branco” ocorreu também na resolução do problema de permutação com número maior de possibilidades pelo Aluno 1, A.C.C., como demonstrado adiante.

7. Amanda ganhou ingressos para ir ao cinema. Para acompanhá-la, ela poderá escolher dois amigos entre os sete (Livia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantas duplas diferentes de amigos Camila poderá formar para ir com ela ao cinema?

Figura 11: Resolução do problema de combinação com número maior de possibilidades pelo Aluno 1, A.C.C., do GLP, no pré-teste

Já no pós-teste, adiante (Figura 12), observa-se um importante avanço, uma vez que o aluno, além de iniciar corretamente a resolução do problema, a faz de forma sistemática.

7) A Professora do 4ª ano elaborou uma prova com sete questões (A, B, C, D, E, F, G), das quais os alunos deveriam escolher apenas duas para resolver. De quantas formas eles poderão escolher as duas questões?

A e B b e c C e D D e E F e G
 A e e b e D e e e D e F F e
 A e D b e e e e F D e g
 A e E b e f e e g
 A e f b e g
 A e g

Figura 12: Resolução do problema de combinação com número maior de possibilidades pelo Aluno 1, A.C.C., do GLP, no pós-teste.

Iniciando a resolução de forma correta, é possível perceber que, através da listagem das possibilidades, o Aluno 1 explicita 19 possibilidades para o problema proposto, deixando de listar as seguintes: “E e F” e “E e G”. É interessante o fato de que a resolução desse aluno ocorreu de forma sistemática, sendo mais difícil que ocorra o esquecimento de possibilidades a serem listadas, mas que, ainda assim, como visto no exemplo, há possibilidade de acontecer.

Adiante, apresenta-se a resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades pela Aluna 3, no pré-teste. Ela busca solucioná-lo, através de uma multiplicação e de uma divisão, sendo a resposta categorizada como “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”, uma vez que não há indícios de relação com o problema proposto.

2. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?

Figura 13: Resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades pela Aluna 3, B.K.C.F., do GLP, no pré-teste.

Já no pós-teste, a Aluna 3, B.K.C.F., como é possível observar adiante (Figura 14), além de listar todas as possibilidades de forma sistemática, realiza uma multiplicação de forma correta, que também responde o problema.

- 2) Maurício, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas e quais formas diferentes poderemos ter essa escolha?

Figura 14: Resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades pela Aluna 3, B.K.C.F., do GLP, no pós-teste.

No que se refere à resolução de problemas de permutação no GLP, apresenta-se como exemplo o Aluno 1, A.C.C., que, no pré-teste, responde o problema com “2 formas”, como pode-se ver adiante (Figura 15), enquadrando-se assim na categoria “Apenas resposta incorreta”.

4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?

2 formas

Figura 15: Resolução do problema de permutação com número menor de possibilidades pelo Aluno 1, A.C.C., do GLP, no pré-teste

Já no pós-teste (Figura 16), o Aluno A.C.C. lista algumas possibilidades válidas para o problema, enquadrando-se na categoria “Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática”, uma vez que, ainda que não

conclua o problema com êxito, apresenta importantes avanços, se em comparação com o pré-teste (Figura 15).

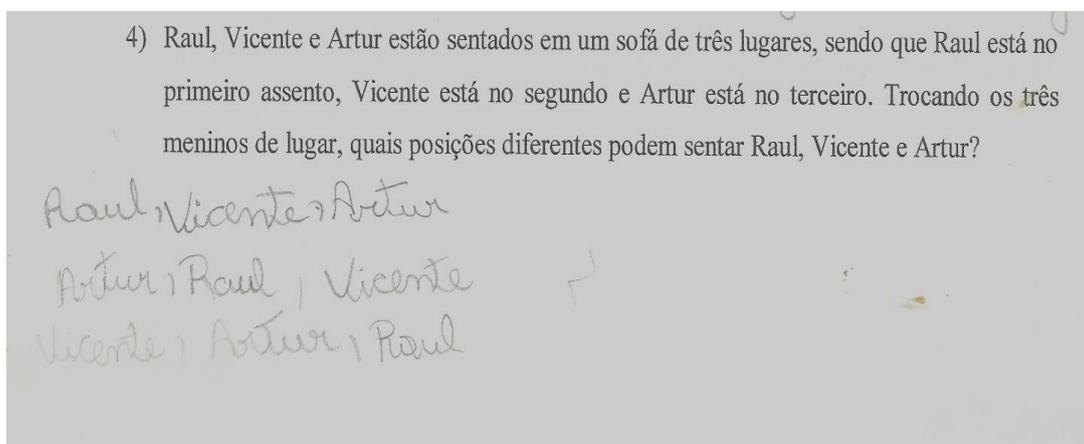


Figura 16: Resolução do problema de permutação com número menor de possibilidades pelo Aluno 1, A.C.C., do GLP, no pós-teste.

Os dados neste estudo analisados e discutidos permitem perceber que ambos os grupos apresentaram avanços importantes, no que se refere à compreensão combinatória, um conteúdo que exige tempo e reflexão para que seja apreendido.

Apesar disso, principalmente através dos resultados apresentados durante a análise de acertos totais, o trabalho com material manipulativo (GMM), com os alunos estudados, não possibilitou um maior entendimento acerca da combinatória, se em comparação com o grupo que trabalhou apenas com lápis e papel (GLP). Inclusive, o GLP, em termos de acertos totais, como dito anteriormente, apresentou mais avanços do que o GMM.

Refletindo sobre o porquê do avanço menor, quando ocorreu o trabalho com o material manipulativo, Azevedo e Borba (2013), em estudo comparando o ensino de combinatória, através do *software* Árbol e do lápis e papel, com a árvore de possibilidades, explicitam que o grupo que trabalhou com lápis e papel apresentou mais avanços, em termos significativos, do que o grupo que trabalhou com o *software*. Como possível explicação para essa diferença entre os dois grupos, as autoras levantam que os acertos se evidenciam mais quando os alunos são avaliados na mesma representação em que foram trabalhadas as situações, uma vez que os alunos que trabalharam com o Árbol precisavam ainda transformar o conhecimento aprendido no *software* para a representação escrita utilizada no pós-teste (lápis e papel). Da mesma forma, no estudo atual, os alunos que trabalharam

durante as intervenções com o material manipulativo, foram submetidos a um pós-teste (após as intervenções), que solicitava que resolvessem problemas a partir de lápis e papel, o que pode ter dificultado a resolução. Talvez, se os alunos fossem testados da mesma forma como trabalharam durante as intervenções (através de material manipulativo), avançassem mais.

Conclusões

No presente estudo, continua-se a defender a importância de um trabalho sistemático, com ênfase nos **invariantes**, aqui inclusas as diferenças e semelhanças entre cada um dos problemas combinatórios, nas possíveis estratégias que podem vir a facilitar as resoluções, e na **percepção de regularidade**, ou seja, na **generalização**, para que os alunos obtenham uma maior compreensão acerca da análise combinatória. Percebe-se que mais do que a forma escolhida para resolver os problemas, seja com material manipulativo, com lápis e papel ou com outro instrumento, é imprescindível que eles compreendam os invariantes e utilizem estratégias válidas de resolução, aprimoradas ao longo da aprendizagem.

Estudos como o atual, que investigam e comparam dois grupos, um trabalhando com material manipulativo e outro com lápis e papel, possibilitam que se saiba, de forma mais detalhada, quais as formas viáveis de se trabalhar a combinatória. Além disso, é válido destacar que, a depender do grupo de alunos e das experiências por eles anteriormente vivenciadas, algumas formas de trabalho, tais como o material manipulativo, que, no presente estudo, não foram tão eficazes, podem apresentar mais avanços.

Referências bibliográficas

AZEVEDO, J; COSTA, D. M. E. da; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13,2011 Recife. *Anais...* Recife, 2011, p.1-12

BARRETO, F.; AMARAL, F.; BORBA, R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. *Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia*. Recife: UFPE, 2007. V. 2. p. 1-21.

BARRETO, F. ; BORBA, R. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13,2011 Recife. *Anais...* Recife, 2011, p.1-12

BORBA, R.; AZEVEDO, J. *Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software*. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.6, n.2, p. 113-140, junho 2013.

BRASIL, MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

_____. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

BRITO, A.; BELLEMAIN, P. O uso de material manipulativo como recurso didático: construção da grandeza comprimento. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2, 2008. *Anais...* Recife, 2008, p.1-12.

LIMA, R.; BORBA, R. O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adulto: do início de escolarização ao término do ensino médio. SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2009, São Paulo. *Anais...* São Paulo, 2009.

MATIAS, P.; SANTOS, M.; PESSOA, C. Crianças de educação infantil resolvendo problemas de arranjo. CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13,2011 Recife. *Anais...* Recife, 2011, p.1-12

MATOS, J.; SERRAZINA, M. *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v.1, n.1, p.1-12, 2010. Disponível em: <<http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4>>. Acesso em: 08/09/2011.

_____. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ*, v. 17, p.105-150, jan-jun 2009.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais do XIII** CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. *Anais...* Recife, 2011, p. 1-12.

_____. GATO, GOTA, TOGA... A Combinatória no 5º ano do ensino fundamental. *Revista Unopar Científica Ciências Humanas e Educação*, p. 35-48,2012.

PESSOA, C.; SILVA, M. Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem-sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do ensino fundamental. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2012, Fortaleza. *Anais...* Fortaleza, 2012, p 1-13.

SCHLIEMANN, A. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

SCHLIEMANN, A.; SANTOS, C.; COSTA, S. Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In: ALENCAR, Eunice Soriano de (Org.). *Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem*. São Paulo: Cortes, 1992. p.97-116.

SELVA, A. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs.). *A compreensão de conceitos aritméticos*. Ensino e pesquisa. São Paulo, Papyrus: 1998. p.95-119.